



**ПРАВООЧНАЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА**

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ
РЕШЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
И ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ**





СПРАВОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ

Л. А. ЛЮСТЕРНИКА

И

А. Р. ЯНПОЛЬСКОГО

С. Г. МИХЛИН и Х. Л. СМОЛИЦКИЙ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ
МЕТОДЫ
РЕШЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
И ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

518 (03)-

М 69

УДК 518.61 (083)

АННОТАЦИЯ

В справочнике изложены важнейшие аналитические и приближенные численные методы решения основных задач для дифференциальных и интегральных уравнений. Приведены основные результаты, относящиеся к устойчивости и погрешности этих методов.

Книга рассчитана на инженеров, физиков и математиков, которым по роду их практической деятельности приходится сталкиваться с вопросами приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также на аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	10
-----------------------	----

Глава I

Приближенное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

§ 1. Аналитические методы	14
1. Разложение решения в ряд Тейлора	14
2. Метод последовательных приближений	19
3. Метод Чаплыгина	22
4. Метод Ньютона—Канторовича	27
5. Метод малого параметра	31
6. Оценка погрешности через невязку	34
§ 2. Численные методы	34
1. Метод Эйлера	35
2. Метод трапеций	35
3. Метод Рунге—Кутта	36
4. Разностные методы. Экстраполяционная формула Адамса	41
5. Интерполяционная формула Адамса	47
6. Другие разностные методы	50
7. Разностные методы для систем и для уравнений высших порядков	54
8. Построение начала таблицы	57
9. Об устойчивости разностных методов	64
10. Погрешность формул Адамса	66
11. Сравнение численных методов	68
Некоторые литературные указания	69

Глава II

Метод сеток

§ 1. Уравнения эллиптического типа	70
1. Сеточные уравнения	70
2. Аппроксимация точной задачи сеточной	79
3. Вопросы разрешимости, сходимости и оценки погрешности	92
4. Сходимость и оценка погрешности для задачи Дирихле	109

5. Итерационные способы решения сеточной задачи Дирихле	113
6. Численные примеры	118
7. Сеточная задача Неймана	126
8. Задача о собственных значениях эллиптического оператора	136
§ 2. Уравнения гиперболического и параболического типов	143
1. Задача Коши. Выбор решетки и сходимость сеточных решений	143
2. Смешанная задача. Явные и неявные схемы	150
3. Устойчивость разностной схемы. Признаки устойчивости	156
4. Примеры устойчивых разностных схем	172
§ 3. Нелинейные задачи	175
1. Квазилинейные гиперболические системы	175
2. Параболическое уравнение; задача с подвижной границей (модифицированная однослойная задача Стефана)	181
3. Задача Дирихле для слабо нелинейного эллиптического уравнения	183
Некоторые литературные указания	187

Глава III

Вариационные методы

§ 1. Положительные операторы и энергия	188
1. Оператор краевой задачи	188
2. Положительные и положительно определенные операторы	189
3. Энергетическое пространство	191
4. Обобщенные производные	193
5. Теоремы вложения	196
§ 2. Энергетический метод	199
1. Функционал энергетического метода	199
2. Построение решения вариационной задачи	200
3. Метод Ритца	202
4. Методы решения системы Ритца	203
5. Естественные краевые условия	206
6. Неоднородные краевые условия	208
7. Энергетический метод в случае положительного оператора	210
§ 3. Приложения к задачам математической физики	211
1. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка	211
2. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков	215
3. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений	218
4. Основные задачи для уравнений эллиптического типа. Уравнения Лапласа и Пуассона	221

5. Вырождающиеся эллиптические уравнения	227
6. Уравнения высших порядков	228
7. Изгиб пластин	230
8. Изгиб сжатой пластины	233
9. Принцип минимума потенциальной энергии в статической теории упругости	234
10. Краевые задачи для бесконечных областей	241
§ 4. Проблема собственных чисел	243
1. Основные понятия и теоремы	243
2. Метод Релея—Ритца	246
3. Уравнения вида $Au - \lambda Bv = 0$	248
4. Спектр обыкновенного дифференциального оператора	250
5. Спектр эллиптического оператора	253
6. Устойчивость сжатой пластины	258
7. Спектр вырождающегося эллиптического уравнения	258
8. Собственные колебания упругих тел	259
9. Более общие условия положительной определенности дифференциальных операторов	262
10. Минимаксимальный принцип	263
§ 5. Другие вариационные методы и оценка погрешности	264
1. Оценка погрешности приближенного решения	264
2. Метод ортогональных проекций	266
3. Приложения к частным задачам	268
4. Метод Третьяка	271
5. Двусторонние оценки функционалов	278
6. Двусторонние оценки собственных чисел	279
7. Ошибка в решении, проистекающая от ошибки в уравнении	282
§ 6. Метод наименьших квадратов	283
1. Общие замечания	283
2. Связь с энергетическим методом	285
3. Применение к задачам теории потенциала на плоскости	286
4. Применение к плоской задаче теории упругости	289
§ 7. Об устойчивости метода Ритца	290
1. Общие замечания	290
2. Минимальные и сильно минимальные системы	291
3. Предельные свойства коэффициентов Ритца	293
4. Устойчивость метода Ритца	294
5. О числе обусловленности матрицы Ритца	299
6. Сходимость невязки к нулю	299
§ 8. Подбор координатных функций	300
1. Построение полной координатной системы	300
2. Требования к рациональному выбору координатной системы	302
3. Одномерные краевые задачи	303
4. Двумерные краевые задачи	307

§ 9. Метод Бубнова—Галёркина	314
1. Основы метода	314
2. Достаточный признак сходимости	315
3. Применение к задачам математической физики	315
4. Видоизменение метода в случае естественных краевых условий	316
5. Обобщение метода Бубнова—Галёркина (проекционный метод)	317
§ 10. Вариационные методы в некоторых нелинейных задачах	319
1. Общие теоремы	319
2. Метод Ритца	320
3. Нелинейная теория пологих оболочек	322
4. Функционалы теории пластичности и их обобщение	323
5. Решение нелинейных систем Ритца. Метод Качанова	324
6. Сведение к задаче Коши	326
§ 11. Метод прямых	329
1. Основы метода	329
2. Метод прямых для уравнений Лапласа и Пуассона	331
3. Бигармоническое уравнение	333
4. Метод прямых для параболического уравнения	334
Некоторые литературные указания	335

Глава IV

Приближенное решение интегральных уравнений

§ 1. Приближенное вычисление характеристических чисел и собственных функций симметричного ядра	337
1. Общие замечания	337
2. Метод Ритца	340
3. Метод моментов	343
4. Метод Келлога	344
5. Метод следов	346
6. Замена ядра вырожденным	348
7. Применение определителя Фредгольма	349
§ 2. Метод итераций	349
1. Простая итерация	349
2. Условия сходимости	350
3. Видоизменение метода итераций	352
4. Интегральное уравнение первого рода с симметричным ядром	354
§ 3. Применение квадратурных формул	354
1. Уравнения Вольтерра второго рода	354
2. Уравнения Вольтерра первого рода	355
3. Уравнения Фредгольма	356

§ 4. Замена ядра вырожденным	358
§ 5. Методы Бубнова—Галёркина и наименьших квадратов . .	364
1. Метод Бубнова—Галёркина	364
2. Метод наименьших квадратов	365
§ 6. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений	367
1. Постановка задачи	367
2. Решение сингулярного уравнения с вырожденным ядром	368
Некоторые литературные указания	372
Библиография	373
Алфавитный указатель	380

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель настоящего выпуска «Справочной математической библиотеки» — ознакомить читателя с важнейшими и наиболее употребительными методами приближенного решения краевых задач (включая и задачу Коши) для дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных, а также с приближенными методами решения интегральных уравнений наиболее часто встречающихся типов: Фредгольма, Вольтерра и сингулярных одномерных. Этим охватывается вся классическая область приложений математического анализа к механике, технике и математической физике.

Методы приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений распадаются на две большие группы: численные и аналитические методы. Наиболее важную и разработанную часть первой группы составляют различные разновидности *сеточных методов*; в свою очередь в группе аналитических методов наиболее важными являются *вариационные методы*. Промежуточное место занимает так называемый «метод прямых». Этот метод в последнее время привлекает все большее внимание как теоретиков, так и прикладников; однако он еще не настолько разработан, чтобы выделить его особо, и авторы отнесли его к группе аналитических методов,

Построение книги в основном соответствует разделению приближенных методов на численные и аналитические. Основные главы книги, а именно главы II и III, соответствуют основным группам приближенных методов—сеточным и вариационным (к последним присоединен метод прямых)—и не связаны сколько-нибудь тесно с видом того уравнения, к которому данный метод применяется. Методы каждой из названных глав в равной мере могут относиться к обыкновенным дифференциальным уравнениям, к дифференциальным уравнениям в частных производных, к интегральным уравнениям; эти методы можно применять и к линейным, и к нелинейным задачам. Авторы сочли, однако, целесообразным выделить два вопроса, в силу их специфичности, в особые главы.

Так появились две сравнительно небольшие главы: о задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (глава I) и о приближенном решении интегральных уравнений (глава IV). Дело в том, что для упомянутых здесь проблем разработаны методы, как численные, так и аналитические, которые трудно, а часто и невозможно отнести к сеточным, соответственно к вариационным. Правда, часть материала глав I и IV могла бы быть отнесена к главам II и III; так, разностные методы для обыкновенных дифференциальных уравнений, а также методы решения интегральных уравнений, основанные на применении квадратурных формул, можно было бы отнести к главе II, а методы Рунге—Галёркина и наименьших квадратов в интегральных уравнениях—к главе III. Однако этим была бы нарушена цельность и связность изложения.

В главе I сохранено разделение методов по двум основным группам: в § 1 этой главы излагаются аналитические методы решения задачи Коши, в § 2—численные методы решения той же задачи. От расположения материала строго по группам методов пришлось отступить в главе об

интегральных уравнениях, где такое расположение было бы недостаточно оправданным; в этой главе материал распределен по основным задачам: вычисление собственных чисел и собственных функций симметричного ядра (§ 1), решение уравнений Фредгольма и Вольтерра (§§ 2—5) и решение сингулярных уравнений (§ 6).

Глава I написана авторами совместно. Глава II написана Х. Л. Смолицким, главы III и IV—С. Г. Михлиным.

Г Л А В А I

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ
ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ**

В этой главе рассматривается задача Коши как для одного обыкновенного дифференциального уравнения, так и для системы таких уравнений. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений мало отличаются по методам приближенного решения от аналогичных задач для уравнений в частных производных: и те и другие решаются, как правило, либо сеточными, либо вариационными методами. Поэтому краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений отнесены нами к главам II и III.

В § 1 настоящей главы рассмотрены аналитические приближенные методы решения задачи Коши, дающие приближенное решение в виде некоторого аналитического выражения; § 2 посвящен численным методам решения задачи Коши, которые в качестве окончательного результата дают таблицу приближенных значений искомой функции.

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y) \quad (1.1)$$

состоит в нахождении интеграла этого уравнения в некотором промежутке $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ по начальному условию

$$y|_{x=x_0} = y_0. \quad (1.2)$$

Пусть область G плоскости (x, y) содержит точку (x_0, y_0) , и пусть в этой области функция $f(x, y)$ непрерывна и, скажем, имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$. В этих

условиях можно гарантировать существование и единственность решения задачи Коши (1.1), (1.2) в некотором промежутке $x_0 - A < x < x_0 + A$, и мы будем считать, что A есть наибольшее из чисел, для которых в промежутке $x_0 - A < x < x_0 + A$ существует решение задачи (1.1), (1.2). Если окажется, что $a < A$, то поставленная первоначально задача Коши также имеет решение, и притом единственное; если же $a > A$, то поставленная задача не имеет решения — решение существует не в желательном для нас промежутке $x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$, а только в меньшем промежутке $x_0 - A' \leq x \leq x_0 + A'$, где A' — любое число, меньшее, чем A . Так, например, задача Коши

$$y' = y^2 + 1, \quad y|_{x=0} = 0$$

имеет единственное решение $y = \operatorname{tg} x$, которое определено и непрерывно только в промежутке $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, хотя функция $1 + y^2$ непрерывна и дифференцируема на всей плоскости (x, y) . Задача о разыскании решения только что поставленной задачи Коши на промежутке $-a \leq x \leq a$, где $a \geq \frac{\pi}{2}$, не имеет решения.

В последующем при рассмотрении приближенных методов решения задачи Коши предполагается, что точное решение существует на всем промежутке, на котором разыскивается приближенное решение.

§ 1. Аналитические методы

1. Разложение решения в ряд Тейлора. Пусть функция $f(x, y)$ из правой части уравнения (1.1) аналитическая в окрестности точки (x_0, y_0) ; это значит, что указанная функция разлагается в двойной степенной ряд

$$f(x, y) = \sum_{k,m=0}^{\infty} a_{km} (x - x_0)^k (y - y_0)^m, \quad (1.3)$$

сходящийся в окрестности точки (x_0, y_0) , т. е. при значениях x и y , достаточно близких соответственно к x_0 и y_0 . Тогда, как известно (см. [18], стр. 324—326, а также [120], § 32), для значений x , достаточно близких к x_0 , решение

задачи Коши (1.1), (1.2) существует, единственно и представляет собой аналитическую функцию от x , которая, следовательно, в окрестности точки x разлагается в ряд Тейлора

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k. \quad (1.4)$$

Можно указать круг комплексной плоскости x (а следовательно, и интервал вещественной оси x), в котором наверняка сходится ряд (1.4). Именно, пусть функция $f(x, y)$ аналитична, когда *комплексные* переменные x и y удовлетворяют неравенствам

$$|x-x_0| \leq \alpha, \quad |y-y_0| \leq \beta, \quad (1.5)$$

где α и β — некоторые постоянные. В замкнутой области (1.5) изменения переменных x и y функция $f(x, y)$ во всяком случае непрерывна и потому ограничена; пусть в этой области $|f(x, y)| \leq \mu$. Тогда ряд (1.4) сходится в круге

$$|x-x_0| \leq \varrho, \quad \varrho = \text{Min} \left(\alpha, \frac{\beta}{\mu} \right). \quad (1.6)$$

Зададимся натуральным числом N и сохраним в ряде (1.4) только члены порядка $\leq N$. Приближенная формула

$$y(x) \approx y_N(x) = \sum_{k=0}^N \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \quad (1.7)$$

доставит нам приближенное же решение задачи (1.1), (1.2), если мы сумеем вычислить величины $y^{(k)}(x_0)$ ($k=0, 1, 2, \dots, N$). Но это легко сделать, исходя из уравнений (1.1) и (1.2). Действительно, начальное условие (1.2) дает нам непосредственно

$$y(x_0) = y_0.$$

Положив теперь в уравнении (1.1) $x = x_0$, получим

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Дифференцируя (1.1), найдем:

$$\begin{aligned} y'' &= f_x(x, y) + f_y(x, y) y', \\ y''' &= f_{xx}(x, y) + 2f_{xy}(x, y) y' + f_{yy}(x, y) y'^2 + f_y(x, y) y'', \\ &\dots \end{aligned}$$

Полагая здесь опять $x = x_0$, мы последовательно вычислим значения $y''(x_0)$, $y'''(x_0)$, ..., $y^{(N)}(x_0)$.

Заметим, что приближенная формула (1.7) применима в круге (1.6) комплексной плоскости, а следовательно, и в промежутке $|x - x_0| \leq \rho$ вещественной оси x .

Пример 1. Найдем приближенное решение задачи Коши

$$y' = x^2 + y^2, \quad y|_{x=0} = 0, \quad (1.8)$$

соответствующее значению $N=7$ в формуле (1.7).

Из данных задачи сразу следует:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Дифференцируя уравнение (1.8), находим:

$$\begin{aligned} y'' &= 2x + 2yy', & y''' &= 2 + 2yy'' + 2y'^2, \\ y^{(4)} &= 2yy''' + 6y'y'', & y^{(5)} &= 2yy^{(4)} + 8y'y''' + 6y''^2, \\ y^{(6)} &= 2yy^{(5)} + 0y'y^{(4)} + 20y''y'', & \\ y^{(7)} &= 2yy^{(6)} + 12y'y^{(5)} + 30y''y^{(4)} + 20y'''^2. \end{aligned}$$

Полагая здесь $x=0$ и используя уже известные значения $y(0) = y'(0) = 0$, найдем последовательно:

$$y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 2, \quad y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = y^{(6)}(0) = 0, \quad y^{(7)}(0) = 80.$$

Искомое приближенное решение равно

$$y_7(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}. \quad (1.9)$$

В данном случае нетрудно оценить радиус сходимости ряда (1.4) и, следовательно, область применимости приближенного решения (1.9). Функция $x^2 + y^2$ аналитична при всех значениях x и y , поэтому числа α и β в формуле (1.5) можно взять какими угодно. Возьмем $\beta = k\alpha$, где k — некоторая постоянная, а величина α какая угодно. Тогда $|x^2 + y^2| \leq \alpha^2(1 + k^2)$ и можно положить $\mu = \alpha^2(1 + k^2)$. Теперь по формуле (1.6)

$$\rho = \min \left(\alpha, \frac{k}{\alpha(1 + k^2)} \right).$$

Если k фиксировано, то наибольшее значение ρ , равное $\sqrt{\frac{k}{1 + k^2}}$, получится при $\alpha = \sqrt{\frac{k}{1 + k^2}}$. Меняя k , убедимся, что при $k=1$ получится наибольшее значение $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Таким образом, решение задачи (1.8) существует по крайней мере в промежутке $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Рассмотрим теперь уравнение порядка $n > 1$:

$$y^{(n)} = f(x, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.10)$$

и поставим для этого уравнения задачу Коши: найти интеграл, удовлетворяющий начальным условиям

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (1.11)$$

Если правая часть уравнения (1.10) есть аналитическая функция своих аргументов в окрестности точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$, то решение задачи Коши (1.10), (1.11) при значениях x , достаточно близких к x_0 , существует, единственно и разлагается в ряд Тейлора (1.4). По-прежнему можно строить приближенное решение в виде (1.7); величины $y^{(k)}(x_0)$ при $k \leq n-1$ непосредственно даны начальными условиями (1.11), а при $k \geq n$ рекуррентно определяются дифференцированием уравнения (1.10) и последующей подстановкой $x = x_0$.

Пример 2. Найти решение задачи Коши

$$y'' = x + y^2, \quad y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 1.$$

Приближенное решение будем искать по формуле (1.7) при $N=8$. Из данных задачи сразу находим:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0.$$

Дифференцируя уравнение $y'' = x + y^2$, имеем:

$$\begin{aligned} y''' &= 1 + 2yy', & y^{(4)} &= 2yy'' + 2y'^2, \\ y^{(5)} &= 2yy''' + 6y'y'', \\ y^{(6)} &= 2yy^{(4)} + 8y'y'' + 6y'^2, \\ y^{(7)} &= 2yy^{(5)} + 10y'y^{(4)} + 20y''y''', \\ y^{(8)} &= 2yy^{(6)} + 12y'y^{(5)} + 30y''y^{(4)} + 20y'''^2. \end{aligned}$$

При $x=0$ получаем, принимая во внимание значения $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, найденные выше:

$$\begin{aligned} y'''(0) &= 1, & y^{(4)}(0) &= 2, & y^{(5)}(0) &= 0, & y^{(6)}(0) &= 8, \\ y^{(7)}(0) &= 20, & y^{(8)}(0) &= 20. \end{aligned}$$

Теперь формула (1.7) дает приближенное решение нашей задачи:

$$y_8(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{90} + \frac{x^7}{252} + \frac{x^8}{2016}.$$

Обратимся теперь к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Будем рассматривать только системы

первого порядка; общий случай, как известно, к этому легко сводится.

Будем искать решение системы уравнений

$$y_j' = f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (1.12)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_j|_{x=x_0} = y_{j_0}. \quad (1.13)$$

Если в окрестности точки $(x_0, y_{1_0}, y_{2_0}, \dots, y_{m_0})$ правые части уравнений (1.12) суть аналитические функции своих аргументов, то при значениях x , близких к x_0 , решение задачи Коши (1.12), (1.13) существует, единственно и может быть представлено разложениями в ряды Тейлора

$$y_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_j^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (1.14)$$

Сохраняя в этих рядах только члены порядка $\leq N$, получаем приближенное решение

$$y_{jN}(x) = \sum_{n=0}^N \frac{y_j^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (1.15)$$

Значения величин $y_j^{(n)}(x_0)$ получаются из начальных условий (1.13), из уравнений (1.12) и из соотношений, получаемых дифференцированием этих уравнений и последующей подстановкой $x = x_0$.

Пример 3. Построим приближенное решение задачи Коши для системы

$$y' = x + z^2, \quad z' = y^2 \quad (1.16)$$

при начальных условиях

$$y|_{x=0} = 1, \quad z|_{x=0} = 0. \quad (1.17)$$

В целях экономии места ограничимся грубым приближением и положим в (1.15) $N=2$, так что

$$y(x) \approx y_2(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2} y''(0),$$

$$z(x) \approx z_2(x) = z(0) + xz'(0) + \frac{x^2}{2} z''(0).$$

Начальные условия (1.17) и уравнения (1.16) дают:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 1.$$

Дифференцируя уравнения (1.16), найдем:

$$y'' = 1 + 2zz', \quad z'' = 2yy'.$$

Отсюда

$$y''(0) = 1, \quad z''(0) = 0$$

и окончательно

$$y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2}, \quad z_2(x) = x.$$

Можно указать область сходимости (вообще говоря, не наиболее широкую) рядов (1.14). Пусть $f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) аналитичны в области

$$\begin{aligned} |x - x_0| &\leq \alpha, & |y_1 - y_{10}| &\leq \beta, \\ |y_2 - y_{20}| &\leq \beta, \dots, & |y_m - y_{m0}| &\leq \beta \end{aligned}$$

изменения комплексных переменных x, y_1, y_2, \dots, y_m , и пусть в этой области

$$|f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_m)| \leq \mu.$$

Тогда ряды (1.14) сходятся [120] в круге $|x - x_0| \leq \rho$, где

$$\rho = \min \left(\alpha, \frac{\beta}{\mu} \right).$$

2. Метод последовательных приближений. а) Уравнение первого порядка. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.1) при начальном условии (1.2). Мы не будем больше предполагать, что функция $f(x, y)$, стоящая в правой части уравнения (1.1), аналитическая, и ограничимся более общим предположением: в замкнутом прямоугольнике плоскости (x, y) , определяемом неравенствами

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b, \quad (1.18)$$

где a и b — некоторые положительные постоянные, функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|, \quad K = \text{const.} \quad (1.19)$$

Известно, что условие Липшица (1.19) выполняется, если функция $f(x, y)$ имеет производную $\frac{\partial f}{\partial y}$ такую, что $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq K$.

Будучи непрерывной в замкнутой области (1.18), функция $f(x, y)$ в ней ограничена: существует такая постоянная

M , что если x и y удовлетворяют неравенствам (1.18), то $|f(x, y)| \leq M$.

Известно (см. [93], п. 51 или [99]), что если $f(x, y)$ удовлетворяет перечисленным только что требованиям, то решение задачи Коши (1.1), (1.2) существует и единственно в промежутке

$$|x - x_0| \leq c, \quad c = \min\left(a, \frac{b}{M}\right); \quad (1.20)$$

это решение можно найти как предел последовательных приближений, которые строятся по рекуррентной формуле

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt. \quad (1.21)$$

Выбор начального приближения безразличен; проще всего за начальное приближение взять число y_0 .

Остановимся на каком-нибудь числе n и примем за приближенное решение правую часть формулы (1.21); мы приходим тогда к приближенному равенству

$$y(x) \approx y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt. \quad (1.22)$$

Его погрешность можно оценивать неравенством

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{M}{K} \frac{(Kc)^n}{n!}. \quad (1.23)$$

Следует, однако, иметь в виду, что оценка (1.23) часто оказывается чрезмерно завышенной; применяя метод последовательных приближений, следует остановиться на таком n , для которого y_{n-1} и y_n совпадают в пределах допустимой погрешности.

Недостатком метода последовательных приближений является необходимость вычисления интегралов, зависящих от параметра.

Пример 4. Применим метод последовательных приближений к задаче (1.8). Как мы видели в п. 1, решение этой задачи определено во всяком случае в замкнутом промежутке $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. При этом решение также заключено в промежутке $|y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Оценим теперь в прямоугольнике $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ постоянную K , входящую в условие Липшица (короче: *постоянную Липшица*), для функции $f(x, y) = x^2 + y^2$:

$$K = \max_{|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, |y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \sqrt{2}.$$

Применяя метод последовательных приближений к задаче (1.8), выберем в качестве начального приближения $y_0 = y(0) = 0$. Тогда

$$y_1(x) = \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3} x^3,$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(t^2 + \frac{1}{9} t^6 \right) dt = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{63} x^7,$$

$$\begin{aligned} y_3(x) &= \int_0^x \left(t^2 + \frac{1}{9} t^6 + \frac{2}{189} t^{10} + \frac{1}{3969} t^{14} \right) dt = \\ &= \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{63} x^7 + \frac{2}{2079} x^{11} + \frac{1}{59535} x^{15}. \end{aligned}$$

При $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ разность между $y_2(x)$ и $y_3(x)$ достаточно мала — она не превосходит величины

$$\frac{2}{2079} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{11} + \frac{1}{59535} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{15} < 0,000022,$$

и можно приближенно положить

$$y(x) \approx y_2(x) = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{63} x^7,$$

что совпадает с приближенным решением, полученным по формуле Тейлора.

Формула (1.23) дает

$$|y(x) - y_3(x)| \leq \frac{1}{3! \sqrt{2}} = 0,118,$$

что, как мы увидим ниже, значительно превосходит истинную погрешность.

б) Дифференциальное уравнение порядка выше первого. Этот случай легко приводится к случаю системы дифференциальных уравнений первого порядка.

в) Системы дифференциальных уравнений первого порядка. Для задачи Коши (1.12), (1.13) последовательные приближения вычисляются по формуле

$$y_{jn}(x) = y_{j0} + \int_{x_0}^x f_j(t, y_{1, n-1}(t), y_{2, n-1}(t), \dots, y_{m, n-1}(t)) dt \quad (1.24)$$

$$(j=1, 2, \dots, m).$$

При этом предполагается, что функции f_j непрерывны и удовлетворяют по переменным y_k условию Липшица в параллелепипеде

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y_j - y_{j0}| \leq b \quad (j=1, 2, \dots, m).$$

Если M —такая постоянная, что в этом параллелепипеде

$$|f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_m)| \leq M,$$

то решение задачи (1.12), (1.13) существует в промежутке (1.20); в этом промежутке последовательные приближения равномерно сходятся к решению.

Остановившись на каком-нибудь n , получим приближенное решение

$$y_j(x) \approx y_{jn}(x) =$$

$$= y_{j0} + \int_{x_0}^x f_j(t, y_{1, n-1}(t), y_{2, n-1}(t), \dots, y_{m, n-1}(t)) dt \quad (1.25)$$

$$(j=1, 2, \dots, m);$$

погрешность этого приближения оценивается неравенством

$$|y_j(x) - y_{jn}(x)| \leq \frac{M}{K} \frac{(mKc)^n}{n!}. \quad (1.26)$$

3. Метод Чаплыгина. Мы ограничимся здесь случаем уравнения первого порядка. Рассмотрим задачу Коши (1.1), (1.2) и будем считать, что правая часть уравнения, $f(x, y)$, удовлетворяет условиям п. 2. Пусть $y = y(x)$ есть решение нашей задачи Коши; на плоскости (x, y) это кривая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$. В основе метода лежит следующая

Теорема Чаплыгина. Если кривые $y = u(x)$ и $y = v(x)$ обе проходят через точку M_0 и если верны дифференциальные неравенства

$$\begin{aligned} u'(x) - f(x, u(x)) &< 0, \\ v'(x) - f(x, v(x)) &> 0, \quad x > x_0, \end{aligned} \quad (1.27)$$

то при $x > x_0$ справедливо неравенство

$$u(x) < y(x) < v(x). \quad (1.28)$$

Таким образом, если бы удалось найти функции $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие неравенствам (1.27) и равенствам $u(x_0) = v(x_0) = y_0$, то для искомой функции $y(x)$ была бы получена двусторонняя оценка. Дальнейшее состоит в том, чтобы улучшить эту оценку, коль скоро она уже получена. Допустим, что вторая производная $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ сохраняет знак в области прямоугольника (1.18). В пространстве координат (x, y, z) рассмотрим поверхность $z = f(x, y)$ и кривые, по которым она пересекается с плоскостями $x = \text{const}$; эти кривые всегда направлены либо выпуклостью вниз, если $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$, либо выпуклостью вверх, если $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$, и, следовательно, любая дуга такой кривой заключена между своей хордой и касательной, проведенной в произвольной точке дуги. На кривой $z = f(x, y)$, $x = \text{const}$ возьмем дугу, отвечающую значениям y из промежутка $u(x) \leq y \leq v(x)$, и напишем уравнения хорды и касательной, проведенной в точке $y = u(x)$:

$$\begin{aligned} z &= f(x, u(x)) + \frac{f(x, v(x)) - f(x, u(x))}{v(x) - u(x)} (y - u(x)) = \\ &= M(x)y + N(x), \\ z &= f(x, u(x)) + f_y(x, u(x))(y - u(x)) = \tilde{M}(x)y + \tilde{N}(x). \end{aligned}$$

Кривая расположена между касательной и хордой; это значит, что функция $f(x, y)$ заключена между функциями $M(x)y + N(x)$ и $\tilde{M}(x)y + \tilde{N}(x)$. Пусть, например, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$, тогда кривая лежит ниже хорды и выше касательной, т. е.

$$\tilde{M}(x)y + \tilde{N}(x) < f(x) < M(x)y + N(x).$$

Составим линейные дифференциальные уравнения первого порядка:

$$y' = \tilde{M}(x)y + \tilde{N}(x), \quad y' = M(x)y + N(x),$$

и найдем их интегралы (это задача нетрудная), удовлетворяющие начальному условию (1.2); пусть эти интегралы будут $y = u_1(x)$ и $y = v_1(x)$. Доказывается, что имеют место неравенства

$$u(x) < u_1(x) < y(x) < v_1(x) < v(x), \quad (1.29)$$

которые показывают, что новые функции $u_1(x)$ и $v_1(x)$ дают более точные приближения к неизвестной функции $y(x)$. Теперь, исходя из приближений $u_1(x)$ и $v_1(x)$, можно построить новые, еще более точные приближения $u_2(x)$ и $v_2(x)$ и т. д. Процесс очень быстро сходится — справедлива оценка

$$v_n(x) - u_n(x) \leq \frac{C}{2^{2^n}}, \quad (1.30)$$

где C не зависит ни от x , ни от n .

Можно указать (см. [2]) другой прием уточнения приближений $u(x)$ и $v(x)$, при котором нет необходимости предполагать, что вторая производная $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ сохраняет знак. Пусть K — постоянная Липшица функции $f(x, y)$ (см. формулу (1.19)). Тогда функции

$$\left. \begin{aligned} u_1(x) &= u(x) + \int_{x_0}^x e^{-K(x-t)} [f(t, u(t)) - u'(t)] dt, \\ v_1(x) &= v(x) - \int_{x_0}^x e^{-K(x-t)} [v'(t) - f(t, v(t))] dt \end{aligned} \right\} (1.31)$$

удовлетворяют неравенствам (1.29). Как и выше, можно построить последовательность уточняющихся приближений $u_n(x)$, $v_n(x)$, повторно применяя формулы (1.31); по-прежнему $u_n(x)$ и $v_n(x)$ равномерно стремятся к $y(x)$ при $n \rightarrow \infty$, но скорость сходимости меньше, чем в формуле (1.30).

Основная трудность в применении метода Чаплыгина заключается в построении исходной пары приближений $u(x)$ и $v(x)$; сколько-нибудь общие приемы такого построения в литературе не описаны.

Пример 5. Решим по методу Чаплыгина задачу (1.8). Будем считать, что решение ищется в промежутке $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Нетрудно видеть, что можно положить

$$u(x) = \frac{1}{3}x^3, \quad v(x) = \frac{11}{30}x^3.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} u'(x) - x^2 - u^2(x) &= -\frac{1}{9}x^6 < 0, \\ v'(x) - x^2 - v^2(x) &= \frac{1}{10}x^2 - \frac{121}{900}x^6 = \left(\frac{1}{10} - \frac{121}{900}x^4\right)x^2 \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{10} - \frac{121}{900} \cdot \frac{1}{4}\right)x^2 > 0,06x^2 > 0. \end{aligned}$$

Вычисление функций $M(x)$, $N(x)$, $\tilde{M}(x)$, $\tilde{N}(x)$ не составляет труда:

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{7}{10}x^3, & N(x) &= x^2 - \frac{11}{90}x^6, \\ \tilde{M}(x) &= \frac{2}{3}x^3, & \tilde{N}(x) &= x^2 - \frac{1}{9}x^6. \end{aligned}$$

В нашем случае $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 > 0$ и, следовательно, $u_1(x)$ и $v_1(x)$ суть интегралы уравнений

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{2}{3}x^3y + x^2 - \frac{1}{9}x^6, \\ v_1' &= \frac{7}{10}x^3y + x^2 - \frac{11}{90}x^6, \end{aligned}$$

обращающиеся в нуль при $x=0$. Эти интегралы суть

$$u_1(x) = e^{\frac{1}{6}x^4} \int_0^x \left(z^2 - \frac{1}{9}z^6\right) e^{-\frac{1}{6}z^4} dz,$$

$$v_1(x) = e^{\frac{7}{40}x^4} \int_0^x \left(z^2 - \frac{11}{90}z^6\right) e^{-\frac{7}{40}z^4} dz.$$

Разлагая показательные функции в степенные ряды и сохраняя степени x и z только до 11-й, получим:

$$\begin{aligned} u_1(x) &\approx \bar{u}_1(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2}{2079}x^{11}, \\ v_1(x) &\approx \bar{v}_1(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{1}{990}x^{11}; \end{aligned}$$

значение $\bar{u}_1(x)$ совпадает со значением $y_3(x)$, построенным по методу последовательных приближений, с точностью до членов степени выше 11-й.

Функции $\bar{u}_1(x)$ и $\bar{v}_1(x)$ также образуют границы Чаплыгина для искомого решения, так как при $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} \bar{u}'_1 - x^2 - \bar{u}_1^2 &= - \left[\left(\frac{1}{63^2} + \frac{4}{3 \cdot 2079} \right) x^{14} + \frac{4}{63 \cdot 2079} x^{18} + \frac{4}{2079^2} x^{22} \right] < 0, \\ \bar{v}'_1 - x^2 - \bar{v}_1^2 &= \frac{x^{10}}{9} \left\{ \frac{1}{210} - \left[\left(\frac{1}{21^2} + \frac{1}{165} \right) x^4 + \frac{2}{7 \cdot 990} x^8 + \frac{1}{330^2} x^{12} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Производная выражения, стоящего в фигурных скобках, отрицательна при $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, и указанное выражение минимально при наибольшем $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, поэтому

$$v'_1 - x^2 - \bar{v}_1^2 \geq \frac{x^{10}}{9} \left[\frac{1}{210} - \left(\frac{1}{441} + \frac{1}{165} \right) \frac{1}{4} - \frac{1}{7 \cdot 990} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{330^2} \cdot \frac{1}{64} \right] > 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2}{2079} x^{11} < y(x) < \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{1}{990} x^{11}, \quad 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}};$$

если любую из функций $\bar{u}_1(x)$ или $\bar{v}_1(x)$ принять за приближенное решение задачи (1.8), то погрешность этого приближения не превосходит величины

$$\left(\frac{1}{990} - \frac{2}{2079} \right) x^{11} \leq \frac{1}{20 \cdot 790} \frac{1}{\sqrt{2}^{11}} \approx 0,000001,$$

что значительно меньше оценки, полученной в п. 2 по формуле (1.23).

Исходя из начальных приближений $u(x) = \frac{x^3}{3}$, $v(x) = \frac{11}{30} x^3$, можно построить более точные приближения и по формулам (1.31). Вспомогая, что в данном случае постоянная Липшица равна $K = \sqrt{2}$, имеем:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{x^3}{3} + \frac{1}{9} \int_0^x t^3 e^{-\sqrt{2}(x-t)} dt, \\ v_1(x) &= \frac{11}{30} x^3 - \int_0^x \left(\frac{t^2}{10} - \frac{121}{900} t^6 \right) e^{-\sqrt{2}(x-t)} dt; \end{aligned}$$

интегралы здесь вычисляются элементарно; мы на этом останавливаться не будем.

4. Метод Ньютона — Канторовича. Под этим названием известен разработанный Л. В. Канторовичем метод решения весьма общих нелинейных задач. Этот метод восходит к данному Ньютоном методу касательных для решения алгебраических уравнений. Особенность метода состоит в том, что если дано некоторое не слишком грубое начальное приближение к решению данной задачи, то оказывается возможным строить все более и более точные приближения, каждое из которых получается как решение некоторого *линейного* уравнения.

Метод Ньютона — Канторовича подробно изложен в [23] и [24]; мы не будем здесь останавливаться на основах метода и ограничимся только техникой его применения и условиями сходимости в задаче Коши для одного дифференциального уравнения первого порядка (задача (1.1), (1.2)) или для системы таких уравнений (задача (1.12), (1.13)).

а) Одно дифференциальное уравнение первого порядка. Пусть некоторая функция $y_0(x)$ удовлетворяет начальному условию (1.2), так что $y_0(x_0) = y_0$. Будем рассматривать эту функцию как начальное приближение к решению $y(x)$ задачи (1.1), (1.2). Следующее приближение $y_1(x)$ строится как интеграл линейного уравнения

$$y_1' - f_y(x, y_0(x))y_1 = f(x, y_0(x)) - f_y(x, y_0(x))y_0(x),$$

удовлетворяющий начальному условию (1.2); вообще, если построено приближение $y_n(x)$, то следующее приближение $y_{n+1}(x)$ строится как удовлетворяющий условию (1.2) интеграл линейного уравнения

$$y_{n+1}' - f_y(x, y_n(x))y_{n+1} = f(x, y_n(x)) - f_y(x, y_n(x))y_n(x). \quad (1.32)$$

Такой интеграл строится очень просто: если обозначить

$$\begin{aligned} f_y(x, y_n(x)) &= p_n(x), \\ f(x, y_n(x)) - f_y(x, y_n(x))y_n(x) &= q_n(x), \end{aligned}$$

то

$$y_{n+1}(x) = e^{\int_{x_0}^x p_n(t) dt} \left\{ y_0 + \int_{x_0}^x q_n(z) e^{-\int_{x_0}^z p_n(t) dt} dz \right\}. \quad (1.33)$$

Приведем условие сходимости метода и оценку погрешности приближенного решения $y_n(x)$. Допустим, что в прямоугольнике (1.18) функция $f(x, y)$ и ее производные $f_y(x, y)$, $f_{y^2}(x, y)$ непрерывны и, следовательно, ограничены; пусть

$$|f_y(x, y)| \leq M_1, \quad |f_{y^2}(x, y)| \leq M_2.$$

Примем также, что начальное приближение $y_0(x)$ определено при $|x - x_0| \leq a$ и что $|y_0(x) - y_0| \leq b$. Обозначим

$$\varrho = \max_{|x - x_0| \leq a} |y_0(x) - y_0 - \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt|; \quad (1.34)$$

если начальное приближение близко к точному решению, то величина ϱ мала. Далее положим

$$\gamma = a\varrho M_2 e^{2M_1 a}. \quad (1.35)$$

Пусть выполнены неравенства

$$\gamma \leq \frac{1}{2} \quad (1.36)$$

и

$$\frac{2\varrho}{1 + \sqrt{1 - 2\gamma}} \leq b. \quad (1.37)$$

Тогда последовательные приближения (1.33), построенные по методу Ньютона—Канторовича, удовлетворяют неравенству $|y_n(x) - y_0| \leq b$ и сходятся к точному решению задачи равномерно на промежутке $|x - x_0| \leq a$; быстрота сходимости оценивается неравенством

$$|y_n(x) - y(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} (2\gamma)^{2^{n-1}} \varrho. \quad (1.38)$$

Метод Ньютона—Канторовича позволяет также оценить, насколько далеко от начального приближения отстоит точное решение: имеет место неравенство

$$|y(x) - y_0(x)| \leq \frac{2\varrho}{1 + \sqrt{1 - 2\gamma}}. \quad (1.39)$$

Пример 6. Применим метод Ньютона—Канторовича к задаче (1.8). Решение будем строить на отрезке $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

За начальное приближение примем

$$y_0(x) = \frac{x^3}{3}.$$

Тогда

$$\rho = \max_{|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}} \left| \frac{x^3}{3} - \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9} \right) dt \right| = \frac{2^{-\frac{7}{2}}}{63} = 0,0014,$$

$$M_1 = \max_{|y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}} |2y| = \sqrt{2} = 1,4142, \quad M_2 = 2.$$

Отсюда

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} 0,0014 \cdot 2 \cdot e^2 = 0,015.$$

Вычислим первое приближение по методу Ньютона—Канторовича. Имеем:

$$p_0(x) = \frac{2}{3} x^3, \quad q_0(x) = x^2 - \frac{1}{9} x^6$$

и, по формуле (1.33),

$$y_1(x) = e^{\frac{1}{6} x^4} \int_0^x \left(z^2 - \frac{1}{9} z^6 \right) e^{-\frac{z^4}{6}} dz.$$

В силу формулы (1.38) погрешность этого приближения не превосходит величины

$$0,03 \cdot 0,0014 = 0,000042.$$

Построенное нами приближение $y_1(x)$ совпадает с выражением $u_1(x)$, полученным выше по методу Чаплыгина. Напомним, что с точностью до членов степени не ниже 11-й $u_1(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$ и что последнее выражение совпадает со вторым приближением, полученным выше по методу последовательных приближений.

Метод Ньютона—Канторовича иногда позволяет увеличить, по сравнению с тем, что дает метод последовательных приближений, длину промежутка, на котором определено решение задачи Коши.

Так, в приведенном выше примере будем рассматривать функцию $f(x, y) = x^2 + y^2$ в квадрате $|x| \leq 1, |y| \leq 1$. Тогда $M_1 = 2, M_2 = 2$. За начальное приближение возьмем функцию $\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$. Это дает нам

$$\max_{|x| \leq 1} \left| \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} - \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9} + \frac{2t^{10}}{189} + \frac{t^{14}}{3969} \right) dt \right| = \frac{2}{2079} + \frac{1}{59535} < 0,001,$$

и можно положить $\varrho = 0,001$. Теперь

$$\gamma = 0,001 \cdot 1 \cdot 2 \cdot e^4 < 0,110;$$

отсюда

$$\frac{2\varrho}{1 + \sqrt{1-2\gamma}} < \frac{2 \cdot 0,001}{1 + \sqrt{1-0,220}} < 0,00107.$$

Теперь ясно, что решение нашей задачи существует при $|x| \leq 1$ и заключено в пределах

$$\left| y(x) - \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63} \right| \leq 0,00107.$$

б) Система уравнений первого порядка. Рассмотрим задачу (1.12), (1.13). Выберем систему функций $y_{1,0}(x)$, $y_{2,0}(x)$, ..., $y_{m,0}(x)$, удовлетворяющих начальным условиям (1.13), и будем рассматривать эту систему как начальное приближение к точному решению задачи. Тогда первое приближение по методу Ньютона—Канторовича строится как интеграл системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_{j,1} - \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right)_0 y_{k,1} = (f_j)_0 - \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right)_0 y_{k,0} \quad (1.40)$$

$$(j = 1, 2, \dots, m),$$

удовлетворяющий начальным условиям (1.13); символ $()_0$ означает, что $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_m(x)$ заменяются на $y_{1,0}(x)$, $y_{2,0}(x)$, ..., $y_{m,0}(x)$. Если $y_{j,n}(x)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) уже построены, то $(n+1)$ -е приближение $y_{j,n+1}(x)$ строится как удовлетворяющий условиям (1.13) интеграл линейной системы

$$y'_{j,n+1} - \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right)_n y_{k,n+1} = (f_j)_n - \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right)_n y_{k,n} \quad (1.41)$$

$$(j = 1, 2, \dots, m);$$

здесь символ $()_n$ означает, по аналогии с предыдущим, что $y_j(x)$ заменяется на $y_{j,n}(x)$.

Коэффициенты системы (1.41), вообще говоря, переменные, и интегрирование этой системы—задача довольно трудоемкая. Реализация метода Ньютона—Канторовича для системы дифференциальных уравнений (1.12) может оказаться затруднительной, тем более, что матрица элементов $\left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right)_n$

меняется на каждом шаге. Правда, последней трудности можно избежать, если воспользоваться *модифицированным методом* Ньютона—Канторовича. По этому методу $(n+1)$ -е приближение к решению задачи (1.12), (1.13) строится как удовлетворяющее начальным условиям решение линейной системы

$$y'_{j, n+1} - \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right)_0 y_{k, n+1} = (f_j)_n - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right)_0 y_{k, n}; \quad (1.42)$$

при изменении n в системе (1.42) меняются только свободные члены.

Мы не приводим здесь условий сходимости и оценки погрешности для системы ввиду их некоторой громоздкости.

5. Метод малого параметра. Этот метод имеет довольно многообразные формы применения; мы укажем здесь только две из них, причем вторую—на примере.

Пусть дано уравнение

$$y' = f(x, y; \lambda), \quad (1.43)$$

правая часть которого зависит, кроме x и y , еще от некоторого параметра λ , и пусть требуется найти интеграл этого уравнения, удовлетворяющий начальному условию $y|_{x=x_0} = y_0$. Допустим, что при $\lambda = \lambda_0$ решение $y = \varphi(x)$ этой задачи нам известно. Заменой

$$\tilde{x} = x - x_0, \quad \tilde{y} = y - \varphi(x), \quad \tilde{\lambda} = \lambda - \lambda_0$$

можно свести дело к тому случаю, когда $x_0 = y_0 = \lambda_0 = 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$; поэтому сразу будем считать, что уравнение (1.43) надо решать при начальном условии

$$y|_{x=0} = 0 \quad (1.44)$$

и что при $\lambda = 0$ искомое решение есть $y \equiv 0$. Отсюда, между прочим, следует, что необходимо $f(x, 0; 0) \equiv 0$.

Предположим теперь, что функция $f(x, y; \lambda)$ разлагается в ряд по степеням y и λ , сходящийся вблизи значений $y = 0$ и $\lambda = 0$:

$$f(x, y; \lambda) = \sum_{j, k=0}^{\infty} a_{jk}(x) y^j \lambda^k, \quad a_{00} = 0.$$

Решение задачи (1.43), (1.44) будем искать в виде ряда

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k y_k(x);$$

этот ряд начинается с первой степени λ , так как $y(x) \equiv 0$ при $\lambda = 0$; из условия (1.44) вытекают начальные условия

$$y_k|_{x=0} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (1.44')$$

Подставив последний ряд в уравнение (1.43) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ слева и справа, получим:

$$y_1' = a_{10}(x) y_1 + a_{01}(x),$$

$$y_2' = a_{10}(x) y_2 + a_{20} y_1^2 + a_{11} y_1 + a_{02}$$

и т. д. Вообще, k -е уравнение имеет вид

$$y_k' = a_{10}(x) y_k + u_k(x),$$

где $u_k(x)$ зависит, кроме x , еще от $y_1(x), \dots, y_{k-1}(x)$.

Решая первое уравнение при начальном условии $y_1|_{x=0} = 0$, найдем $y_1(x)$; подставив его во второе уравнение и проинтегрировав его при начальном условии $y_2|_{x=0} = 0$, найдем $y_2(x)$ и т. д.

Изложенный здесь прием легко распространяется на системы дифференциальных уравнений и на уравнения высших порядков, а также на тот случай, когда уравнение (или система уравнений) содержит не один, а несколько параметров.

Пример 7 [31]. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$y'' + (1 + 0,1 \cdot x) y + 0,1 \cdot y'^2 = 0 \quad (1.45)$$

при начальных условиях

$$y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 2.$$

Данное дифференциальное уравнение заменим более общим, содержащим два параметра α и β :

$$y'' + y + \alpha x y + \beta y'^2 = 0; \quad (1.46)$$

данное уравнение получается из уравнения (1.46) при $\alpha = \beta = 0,1$. Первое приближение найдем из уравнения,

получающегося при $\alpha = \beta = 0$:

$$y'' + y = 0.$$

Его интеграл, удовлетворяющий начальным условиям, есть $y_1 = \cos x + 2 \sin x$. Следующее приближение возьмем в виде $y_2 = y_1 + \eta_1$, где η_1 есть линейная функция параметров α и β :

$$\eta_1 = -\alpha p(x) - \beta q(x).$$

Подставим y_2 вместо y в уравнение (1.46) и сохраним только члены, содержащие первые степени параметров. Приравняв нулю множители при α и β , получим линейные уравнения для $p(x)$ и $q(x)$:

$$p'' + p = x \cos x + 2x \sin x,$$

$$q'' + q = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cos 2x - 2 \sin 2x.$$

Эти уравнения следует проинтегрировать при следующих начальных условиях:

$$x = 0, \quad p = p' = q = q' = 0,$$

что дает:

$$p(x) = -\frac{1}{2} x^2 \cos x + \frac{1}{4} x \cos x + \frac{1}{4} x^2 \sin x + \\ + \frac{1}{2} x \sin x - \frac{1}{4} \sin x, \\ q(x) = -2 \cos x - \frac{4}{3} \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{2}{3} \sin 2x + \frac{5}{2}.$$

Чтобы построить следующее приближение, представим его в виде $y_3 = y_2 + \eta_2$, где η_2 есть функция второй степени от параметров:

$$\eta_2 = \alpha^2 P(x) + \alpha\beta Q(x) + \beta^2 R(x).$$

Подставив y_3 вместо y в уравнение (1.46) и приравняв нулю коэффициенты при α^2 , $\alpha\beta$, β^2 , получим для $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ линейные уравнения, которые следует проинтегрировать при начальных условиях

$$x = 0, \quad P = P' = Q = Q' = R = R' = 0.$$

Процесс этот может быть продолжен.

6. Оценка погрешности через невязку. Пусть $Y(x)$ — функция, которую мы по тем или иным основаниям рассматриваем как приближенное решение задачи Коши (1.1), (1.2). Разность $\Delta(x) = Y(x) - y(x)$ будем называть *погрешностью приближенного решения* $Y(x)$, разность $\tau(x) = Y'(x) - f(x, Y(x))$ — его *невязкой*; через $y(x)$ обозначено точное решение задачи. Оказывается, что при некоторых условиях можно оценить погрешность приближенного решения через его невязку, которая, очевидно, представляет собой известную функцию от x .

Допустим, что нам удалось найти функцию $A(x)$, непрерывную на отрезке $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, такую, что на этом отрезке выполняется неравенство

$$|f_y(x, y(x))| \leq A(x), \quad (1.47)$$

где, как уже было отмечено, $y(x)$ означает точное решение нашей задачи. Составим линейное уравнение

$$\frac{dz}{dx} = A(x)z + |\tau(x)|$$

и найдем его интеграл $z(x)$, принимающий при $x = x_0$ значение $|Y(x_0) - y_0|$. Тогда на отрезке $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ верна оценка

$$|\Delta(x)| \leq z(x). \quad (1.48)$$

Применение оценки (1.48) в общем случае затруднено тем, что функция $A(x)$, через которую выражается $z(x)$, должна удовлетворять неравенству (1.47), в котором левая часть неизвестна.

§ 2. Численные методы

В § 1 были рассмотрены аналитические приближенные методы решения задачи Коши. В настоящем параграфе рассматриваются численные методы, предлагающие искать решение в виде таблицы приближенных значений искомой функции $y(x)$ для ряда значений независимой переменной x из промежутка $x_0 \leq x \leq x_0 + a$. Эти значения переменной x либо назначаются заранее, либо выбираются последовательно в процессе отыскания приближенного решения. Эти значения переменной x назовем *узлами* и обозначим

через $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$, считая, что $x_n < x_{n+1}$. Через y_n обозначим приближенное значение для $y(x_n)$, где $y(x)$ — точное решение задачи Коши.

Для $y(x)$ имеет место равенство

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y(t)) dt \quad (1.49)$$

$$(n = 0, 1, \dots, N-1).$$

Описываемые ниже численные методы решения задачи Коши в основном отличаются друг от друга подходом к приближенному вычислению интеграла в формуле (1.49).

1. Метод Эйлера. Обычно величина $h_n = x_{n+1} - x_n$, называемая *шагом интегрирования*, выбирается достаточно малой. Метод Эйлера состоит в том, что в коротком промежутке $x_n \leq t \leq x_n + h_n$ функцию $f(t, y(t))$ приближенно заменяют постоянной величиной $f(x_n, y_n)$, которая известна, если x_n выбрана, а y_n уже определена. Тогда вместо равенства (1.49) получается равенство

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n) \quad (n = 0, 1, \dots, N-1), \quad (1.50)$$

позволяющее последовательно определять величины y_1, y_2, \dots, y_N , если заданы x_0, y_0 и выбраны узлы.

2. Метод трапеций. Метод Эйлера можно было бы назвать методом прямоугольника, так как замена интеграла в равенстве (1.49) произведением $h_n f(x_n, y_n)$ равносильна замене криволинейной трапеции под графиком функции $f(t, y(t))$ прямоугольником. Более точной представляется замена криволинейной трапеции прямолинейной, что приводит к равенству

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad (1.51)$$

$$(n = 0, 1, \dots, N-1).$$

Если известны x_n, y_n, x_{n+1} , то равенство (1.51) можно рассматривать как уравнение для определения y_{n+1} . Это уравнение для достаточно малых значений h_n имеет корни, среди которых наиболее близкий к y_n обозначим через y_{n+1} . Этот корень может быть найден методом простой итерации.

3) Вычисляется y_{n+1} по формуле

$$y_{n+1} = y_n + k. \quad (1.57)$$

Числа α_s , β_{sm} , γ_j при заданном r выбираются так, чтобы разность

$$\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} (f(t, \tilde{y}(t)) dt - k$$

($\tilde{y}(x)$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию $\tilde{y}(x) = \bar{y}$), рассматриваемая как функция переменного h , была бесконечно малой возможно более высокого порядка l относительно h при $h \rightarrow 0$. Вообще говоря, этим требованием числа α_s , β_{sm} , γ_j не определяются однозначно и при выборе этих чисел принимаются во внимание также соображения о простоте формул (1.55) и (1.56). Приведем примеры некоторых систем таких чисел и отвечающих им значений l :

$$1) r = 2, \alpha_1 = \beta_{11} = 1, \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}, l = 3;$$

$$2) r = 2, \alpha_1 = \beta_{11} = \frac{1}{2}, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1, l = 3;$$

$$3) r = 3, \alpha_1 = \beta_{11} = \frac{1}{2}, \alpha_2 = 1, \beta_{21} = -1, \beta_{22} = 2,$$

$$\gamma_1 = \gamma_3 = \frac{1}{6}, \gamma_2 = \frac{2}{3}, l = 4;$$

$$4) r = 3, \alpha_1 = \beta_{11} = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \frac{2}{3}, \beta_{21} = 0, \beta_{22} = \frac{2}{3},$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{4}, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = \frac{3}{4}, l = 4;$$

$$5) r = 4, \alpha_1 = \beta_{11} = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \beta_{22} = \frac{1}{2}, \beta_{21} = 0, \alpha_3 = \beta_{33} = 1,$$

$$\beta_{31} = \beta_{32} = 0, \gamma_1 = \gamma_4 = \frac{1}{6}, \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{1}{3}, l = 5;$$

$$6) r = 4, \alpha_1 = \beta_{11} = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \frac{2}{3}, \beta_{21} = -\frac{1}{3}, \beta_{22} = 1,$$

$$\alpha_3 = 1, \beta_{31} = \beta_{33} = 1, \beta_{32} = -1,$$

$$\gamma_1 = \gamma_4 = \frac{1}{8}, \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{3}{8}, l = 5;$$

$$\begin{aligned}
7) \quad r=6, \quad \alpha_1 = \beta_{11} = \frac{1}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{5}, \quad \beta_{21} = \frac{4}{25}, \quad \beta_{22} = \frac{6}{25}, \\
\alpha_3 = 1, \quad \beta_{31} = \frac{1}{4}, \quad \beta_{32} = -3, \quad \beta_{34} = \frac{15}{4}, \\
\alpha_4 = \frac{2}{3}, \quad \beta_{41} = \frac{6}{81}, \quad \beta_{42} = \frac{90}{81}, \quad \beta_{43} = -\frac{50}{81}, \quad \beta_{44} = \frac{8}{18}, \\
\alpha_5 = \frac{4}{5}, \quad \beta_{51} = \frac{6}{75}, \quad \beta_{52} = \frac{36}{75}, \quad \beta_{53} = \frac{10}{75}, \quad \beta_{54} = \frac{8}{75}, \quad \beta_{55} = 0, \\
\gamma_1 = \frac{23}{192}, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \frac{125}{192}, \quad \gamma_4 = 0, \quad \gamma_5 = -\frac{81}{192}, \quad \gamma_6 = \frac{125}{192}, \\
l = 7.
\end{aligned}$$

Здесь приведены не все известные системы чисел.

Подробное изложение формул Рунге—Кутта можно найти в книгах [2], [41].

Система чисел 7) приведена в книге [60]. Наиболее употребительной является система чисел 5). Соответствующий прием будем называть основным приемом Рунге—Кутта. Приведем порядок вычислений в этом случае.

- 1) Вычисляется $k_1^{(n)} = h_n f(x_n, y_n)$.
- 2) Вычисляется $k_2^{(n)} = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_1^{(n)}}{2}\right)$.
- 3) Вычисляется $k_3^{(n)} = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_2^{(n)}}{2}\right)$.
- 4) Вычисляется $k_4^{(n)} = h_n f(x_n + h_n, y_n + k_3^{(n)})$.
- 5) Вычисляется $k^{(n)} = \frac{1}{6}(k_1^{(n)} + 2k_2^{(n)} + 2k_3^{(n)} + k_4^{(n)})$.
- 6) Вычисляется $y_{n+1} = y_n + k^{(n)}$.

Отметим также случай 2), который называют иногда усовершенствованным методом Эйлера; здесь вычисления ведутся так:

- 1) $k_1^{(n)} = h_n f(x_n, y_n)$;
- 2) $k^{(n)} = k_2^{(n)} = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_1^{(n)}}{2}\right)$;
- 3) $y_{n+1} = y_n + k^{(n)}$.

В заключение укажем на схему вычислений по методу Эйлера и Рунге—Кутта при решении задачи Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка. Для простоты записи ограничимся случаем системы двух уравнений.

Пусть

$$\left. \begin{aligned} y' &= f(x, y, z), \\ z' &= g(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

— система, для которой требуется найти решение $y(x)$, $z(x)$, удовлетворяющее условию

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad z|_{x=x_0} = z_0. \quad (1.59)$$

а) Метод Эйлера. Вычисления проводятся по формулам:

$$\left. \begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n f(x_n, y_n, z_n), \\ z_{n+1} &= z_n + h_n g(x_n, y_n, z_n) \\ (n &= 0, 1, 2, \dots, N-1). \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

б) Основной прием Рунге—Кутты. Вычисления проводятся по формулам:

$$1) \quad \begin{aligned} k_1^{(n)} &= h_n f(x_n, y_n, z_n), \\ m_1^{(n)} &= h_n g(x_n, y_n, z_n); \end{aligned}$$

$$2) \quad \begin{aligned} k_2^{(n)} &= h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_1^{(n)}}{2}, z_n + \frac{m_1^{(n)}}{2}\right), \\ m_2^{(n)} &= h_n g\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_1^{(n)}}{2}, z_n + \frac{m_1^{(n)}}{2}\right); \end{aligned}$$

$$3) \quad \begin{aligned} k_3^{(n)} &= h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_2^{(n)}}{2}, z_n + \frac{m_2^{(n)}}{2}\right), \\ m_3^{(n)} &= h_n g\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_2^{(n)}}{2}, z_n + \frac{m_2^{(n)}}{2}\right); \end{aligned}$$

$$4) \quad \begin{aligned} k_4^{(n)} &= h_n f(x_n + h_n, y_n + k_3^{(n)}, z_n + m_3^{(n)}), \\ m_4^{(n)} &= h_n g(x_n + h_n, y_n + k_3^{(n)}, z_n + m_3^{(n)}); \end{aligned}$$

$$5) \quad \begin{aligned} k^{(n)} &= \frac{1}{6} (k_1^{(n)} + 2k_2^{(n)} + 2k_3^{(n)} + k_4^{(n)}), \\ m^{(n)} &= \frac{1}{6} (m_1^{(n)} + 2m_2^{(n)} + 2m_3^{(n)} + m_4^{(n)}); \end{aligned}$$

$$6) \quad \begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + k^{(n)}, \\ z_{n+1} &= z_n + m^{(n)}. \end{aligned}$$

В книгах [2], [30] рассмотрены другие возможные схемы вычислений по методу Рунге—Кутта для решения систем уравнений первого порядка и одного уравнения порядка выше первого.

Пример 8. Для задачи Коши (1.8) найдем приближенное решение, используя основной прием Рунге—Кутта для шага $h=0,1$.

Результаты вычислений сведены в таблицу 1. Вычисления велись с шестью цифрами после запятой. Можно убедиться, что все цифры результата верны.

Таблица 1

x_n	y_n	$k_1^{(n)}$	$k_2^{(n)}$	$k_3^{(n)}$	$k_4^{(n)}$	$k^{(n)}$
0,0	0,000000	0,000000	0,000250	0,000250	0,001000	0,000333
0,1	0,000333	0,001000	0,002250	0,002250	0,004001	0,002334
0,2	0,002667	0,004001	0,006252	0,006253	0,009008	0,006336
0,3	0,009003	0,009008	0,012268	0,012273	0,016045	0,012356
0,4	0,021359	0,016046	0,020336	0,020349	0,025174	0,020432
0,5	0,041791	0,025175	0,030546	0,030576	0,036524	0,030657
0,6	0,072448					

О погрешности методов Эйлера и Рунге—Кутта. Пусть y_n —приближенное значение для $y(x_n)$ ($y(x)$ —точное решение задачи (1.1)—(1.2)). Обозначим через $\tilde{y}_n(x)$ точное решение уравнения (1.1), обращающееся при $x=x_n$ в y_n , т. е. удовлетворяющее условию $\tilde{y}_n(x_n)=y_n$. Тогда разность

$$y_{n+1} - \tilde{y}_n(x_{n+1}) = y_{n+1} - \left[y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, \tilde{y}_n(t)) dt \right] = \\ = (y_{n+1} - y_n) - \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, \tilde{y}_n(t)) dt$$

называется погрешностью n -го шага метода численного интегрирования. Для этой погрешности здесь приводятся оценки в простейшей форме [30].

В последующем C_1, C_2, \dots будут обозначать положительные постоянные, определяемые $f(x, y)$ и ее производными в некоторой окрестности точки (x_n, y_n) .

Для метода Эйлера

$$|y_{n+1} - \tilde{y}_n(x_{n+1})| \leq C_1 h_n^2.$$

Для основной формулы метода Рунге—Кутта

$$|y_{n+1} - \tilde{y}_n(x_{n+1})| \leq C_2 h_n^5.$$

Из сравнения этих оценок следует, что для достаточно малых h_n формула Рунге—Кутта, вообще говоря, дает более точные результаты, чем формула Эйлера.

При численном решении задачи Коши происходит накопление ошибки от шага к шагу: если y_0 задано точно, то уже y_1 получается с некоторой ошибкой, оцениваемой как погрешность одного шага; отклонение $y_2 - y(x_2)$ является наложением ошибки в определении y_1 и ошибки в определении y_2 по y_1 (ошибка одного шага); отклонение $y_n - y(x_n)$ является результатом наложения большого числа ошибок.

Для метода Эйлера (в предположении $h_i = h = \text{const}$) имеет место оценка

$$|y_n - y(x_n)| \leq C_3 h (e^{C_4(x_n - x_0)} - 1),$$

из которой следует равномерное стремление $y_n \rightarrow y(x)$ при $h \rightarrow 0$ ($nh \rightarrow x$). Эта оценка предполагает, что все вычисления для определения y_n проводятся точно (без округлений). Для метода Рунге—Кутта такой простой оценки нет. В статье [113] приведены некоторые оценки для метода Рунге—Кутта, из которых также следует сходимость y_n к $y(x)$ при $h \rightarrow 0$. Там же приводятся формулы для оценки погрешности в предположении, что вычисления проводятся с округлением.

4. Разностные методы. Экстраполяционная формула Адамса. В основе разностных методов решения задачи Коши (1.1)—(1.2) лежит следующее простое соображение. Пусть каким-нибудь способом уже вычислены приближенные значения y_1, y_2, \dots, y_n искомой функции $y(x)$, соответствующие значениям x_1, x_2, \dots, x_n независимой переменной. Будем считать эти значения равноотстоящими, так что $x_{j+1} - x_j = h$, где h —постоянная. Приближенное значение y_{n+1} величины $y(x_{n+1})$ можно вычислить по формуле

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx. \quad (1.61)$$

Заменим под интегралом функцию $f(x, y(x))$ ее интерполяционным многочленом, который в точках $x = x_j$ ($j = n-k, n-k+1, \dots, n$) принимает значения

$$f_j = f(x_j, y_j). \quad (1.62)$$

Этот многочлен имеет вид

$$L_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^k f_{n-j} P_{kj}(x), \quad (1.63)$$

где $P_{kj}(x)$ суть многочлены степени k . Заметим, что $L_{n,k}(x)$ только приближенно совпадает с интерполяционным многочленом функции $f(x, y(x))$, так как в общем случае $y_j \neq y(x_j)$ и потому $f_j \neq f(x_j, y(x_j))$.

Допустим, что многочлен (1.63) достаточно точно экстраполирует функцию $f(x, y(x))$ на промежуток $x_n \leq x \leq x_{n+1}$. В интеграле (1.61) заменим функцию $f(x, y(x))$ многочленом $L_{n,k}(x)$ и положим $x = x_n + th$. Мы придем тогда к приближенной формуле

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^k b_{kj} f(x_{n-j}, y_{n-j}), \quad (1.64)$$

где постоянные b_{kj} определяются формулой

$$b_{kj} = \frac{(-1)^j}{j!(k-j)!} \int_0^1 \frac{t(t+1)\dots(t+k)}{t+j} dt.$$

Формула (1.64) называется *экстраполяционной формулой Адамса*. Приведем значения нескольких первых коэффициентов b_{kj} (см. таблицу 2).

Придавая k различные значения, мы получим различные формулы Адамса; при $k=0$ получается формула (1.50) метода Эйлера, но при h постоянном.

Формуле (1.64) можно придать более удобную форму, если ввести разности функции $f(x, y(x))$:

$$\begin{aligned} \Delta f_j &= f(x_{j+1}, y_{j+1}) - f(x_j, y_j), \\ \Delta^2 f_j &= \Delta(\Delta f_j) = f(x_{j+2}, y_{j+2}) - 2f(x_{j+1}, y_{j+1}) + f(x_j, y_j), \\ \Delta^3 f_j &= \Delta(\Delta^2 f_j) = f(x_{j+3}, y_{j+3}) - 3f(x_{j+2}, y_{j+2}) + \\ &\quad + 3f(x_{j+1}, y_{j+1}) - f(x_j, y_j) \end{aligned}$$

Таблица 2
Значения коэффициентов b_{kj}

$k \backslash j$	0	1	2	3	4
0	1				
1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$			
2	$\frac{23}{12}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{12}$		
3	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{3}{8}$	
4	$\frac{1721}{720}$	$-\frac{1967}{360}$	$\frac{109}{30}$	$-\frac{637}{360}$	$\frac{251}{720}$

и т. д. Мы получаем тогда

$$y_{n+1} = y_n + h(f_n + b_1 \Delta f_{n-1} + b_2 \Delta^2 f_{n-2} + \dots + b_k \Delta^k f_{n-k}), \quad (1.65)$$

где

$$b_j = \frac{1}{j} \int_0^1 t(t+1)\dots(t+j) dt. \quad (1.66)$$

Приведем значения нескольких первых коэффициентов b_k .

Таблица 3
Значения коэффициентов b_k

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$	$\frac{19\ 087}{60\ 480}$	$\frac{5\ 275}{17\ 280}$	$\frac{1\ 070\ 017}{3\ 628\ 800}$	$\frac{1\ 082\ 753}{7\ 257\ 600}$

Приведем схему расположения вычислений по формуле Адамса (1.65); для определенности положим $k=3$, так что

формула Адамса принимает вид

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2} \Delta \eta_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_{n-3}; \quad (1.67)$$

здесь положено

$$\eta_j = hf(x_j, y_j). \quad (1.68)$$

Чтобы начать вычисления по формуле (1.67), надо знать, кроме y_0 , еще значения y_1, y_2, y_3 , соответствующие значениям $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $x_3 = x_0 + 3h$. По этим данным можно вычислить величины, содержащиеся в следующей таблице.

Таблица 4

x	y	Δy	η	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$
x_0	y_0		η_0			
		Δy_0		$\Delta \eta_0$		
x_1	y_1		η_1		$\Delta^2 \eta_0$	
		Δy_1		$\Delta \eta_1$		$\Delta^3 \eta_0$
x_2	y_2		η_2		$\Delta^2 \eta_1$	
		Δy_2		$\Delta \eta_2$		
x_3	y_3		η_3			
x_4						
...
x^n						

Зная числа, расположенные в нижней косой строке, найдем по формуле (1.67) величину Δy_n , а с нею и вели-

чину $y_4 = y_3 + \Delta y_3$. Зная y_4 , вычислим $\eta_4 = hf(x_4, y_4)$. Теперь можно написать следующую косую строку:

$$\Delta \eta_3 = \eta_4 - \eta_3, \quad \Delta^2 \eta_2 = \Delta \eta_3 - \Delta \eta_2, \quad \Delta^3 \eta_1 = \Delta^2 \eta_2 - \Delta^2 \eta_1;$$

записав вычисленные величины на соответствующих местах, получим новую таблицу.

Таблица 5

x	y	Δy	η	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$
x_0	y_0		η_0			
		Δy_0		$\Delta \eta_0$		
x_1	y_1		η_1		$\Delta^2 \eta_0$	
		Δy_1		$\Delta \eta_1$		$\Delta^3 \eta_0$
x_2	y_2		η_2		$\Delta^2 \eta_1$	
		Δy_2		$\Delta \eta_2$		$\Delta^3 \eta_1$
x_3	y_3		η_3		$\Delta^2 \eta_2$	
		Δy_3		$\Delta \eta_3$		
x_4	y_4		η_4			
x_5						
...
x_n						
...

Новая косая строка позволяет вычислить по формуле (1.67) значение Δy_4 . Теперь $y_5 = y_4 + \Delta y_4$, и процесс повторяется.

Если пользоваться не формулой (1.67), а общей формулой (1.65), то, чтобы начать процесс, необходимо иметь значения y_1, y_2, \dots, y_k , соответствующие значениям $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_k = x_0 + kh$ переменной x . Один из возможных способов вычисления величин $y_j (j = 1, 2, \dots, k)$ будет указан в следующем ниже примере; более подробно вопрос о построении начала таблицы Адамса будет рассмотрен в п. 8 настоящего параграфа.

Пример 9. Вернемся к задаче Коши (1.8) и будем решать ее по формуле (1.67).

Положим $h=0,1$. Для вычисления значений y_1, y_2, y_3 воспользуемся приближенным решением $y \approx \frac{x^3}{3}$, полученным в качестве первого приближения по методу последовательных приближений. Начальная таблица имеет такой вид:

Таблица 6

x	y	Δy	η	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$
0,0	0,00000		0,00000			
0,1	0,00033	0,00033	0,00100	0,00100		
0,2	0,00267	0,00234	0,00400	0,00300	0,00200	
0,3	0,00900	0,00633	0,00901	0,00501	0,00201	0,00001

По данным этой таблицы находим:

$$\Delta y_3 = 0,00901 + \frac{1}{2} \cdot 0,00501 + \frac{5}{12} \cdot 0,00201 + \frac{3}{8} \cdot 0,00001 = 0,01236,$$

$$y_4 = y_3 + \Delta y_3 = 0,02136,$$

и можно заполнять следующую косую строку. Для значений x между 0,0 и 0,6 результаты вычислений записаны в таблице 7.

Сравним это с результатами, полученными выше другими методами. Различные аналитические методы привели нас в § 1 к приближенному решению $y(x) \approx \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$, погрешность которого, как

мы видели, мала. При $x=0,6$ имеем $\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} = 0,07244$, что дает

Таблица 7

x	y	Δy	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$
0,0	0,00000		0,00000			
		0,00033		0,00100		
0,1	0,00033		0,00100		0,00200	
		0,00234		0,00300		0,00001
0,2	0,00267		0,00400		0,00201	
		0,00633		0,00501		0,00002
0,3	0,00900		0,00901		0,00203	
		0,01236		0,00704		0,00005
0,4	0,02136		0,01605		0,00208	
		0,02043		0,00912		
0,5	0,04179		0,02517			
		0,03062				
0,6	0,07241					

расхождение с результатом таблицы 7 в $3 \cdot 10^{-5}$. Формула Рунге — Кутты, как мы видели (п. 3), дает значение 0,072448, в котором все знаки верны.

5. Интерполяционная формула Адамса. Обратимся к формуле (1.61) и заменим в ней функцию $f(x, y(x))$ многочленом, который ее интерполирует на отрезке $x_{n-k} \leq x \leq x_{n+1}$. Это приведет нас к приближенной формуле

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=-1}^{+k} c_{kj} f(x_{n-j}, y_{n-j}), \quad (1.69)$$

где

$$c_{kj} = \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!(k-j)!} \int_0^1 \frac{(t-1)t(t+1)\dots(t+k)}{t+j} dt. \quad (1.70)$$

Формула (1.69) называется *интерполяционной формулой Адамса*. Она, в отличие от формулы (1.64), не дает сразу значения y_{n+1} , так как оно содержится и в правой части, а именно в слагаемом с номером $j = -1$. Формула (1.69) дает уравнение относительно неизвестной y_{n+1} ; это уравнение можно решать итерациями, если

$$h < \frac{1}{|c_{k,-1}| M_1}, \quad M_1 = \sup \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|. \quad (1.71)$$

Таким образом, интерполяционная формула Адамса оказывается более трудоемкой, чем экстраполяционная, но зато она точнее.

Приведем значения некоторых коэффициентов c_{kj} .

Таблица 8
Значения коэффициента c_{kj}

$k \backslash j$	-1	0	1	2
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
1	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{12}$	
2	$\frac{3}{8}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$

Если ввести разности функции $f(x, y(x))$, то формулу (1.69) можно привести к виду

$$\Delta y_n = \eta_{n+1} + c_1 \Delta \eta_n + c_2 \Delta^2 \eta_{n-1} + \dots + c_{k+1} \Delta^{k+1} \eta_{n-k}, \quad (1.72)$$

где

$$c_j = \frac{1}{j!} \int_{-1}^0 t(t+1) \dots (t+j-1) dt \quad (1.73)$$

$(j=1, 2, \dots, k+1);$

все коэффициенты c_j отрицательны. Приведем значения нескольких первых коэффициентов c_j .

Таблица 9
Значения коэффициентов c_j

j	1	2	3	4	5	6	7
$-c_j$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{19}{720}$	$\frac{3}{160}$	$\frac{863}{60480}$	$\frac{275}{2016}$

Опишем схему вычислений по интерполяционной формуле Адамса. Для упрощения письма положим в формуле (1.72) $k=2$, что приводит к частной форме интерполяционной формулы Адамса

$$\Delta y_n = \eta_{n+1} - \frac{1}{2} \Delta \eta_n - \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_{n-2}. \quad (1.74)$$

Допустим, что нам известны значения y_1, y_2, y_3 ; в общем случае, если используется формула (1.72) с некоторым значением k , то заранее должны быть известны $y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}$. По данным y_1, y_2, y_3 можно составить таблицу, совпадающую с таблицей 4 п. 4. Задача состоит в том, чтобы вычислить следующую нижнюю косую строку элементов $\eta_4, \Delta \eta_3, \Delta^2 \eta_2, \Delta^3 \eta_1$; тогда, положив в формуле (1.74) $n=3$, мы вычислим Δy_3 , а затем найдем $y_4 = y_3 + \Delta y_3$. Упомянутую косую строку будем строить по методу итераций. Для начального приближения возьмем $\Delta^3 \eta_1^{(0)} = \Delta^3 \eta_0$. Тогда мы найдем последовательно

$$\Delta^2 \eta_2^{(0)} = \Delta^2 \eta_1 + \Delta^3 \eta_1^{(0)}, \quad \Delta \eta_3^{(0)} = \Delta \eta_2 + \Delta^2 \eta_2^{(0)}, \quad \eta_4^{(0)} = \eta_3 + \Delta \eta_3^{(0)},$$

затем по формуле (1.74) вычисляем

$$\Delta y_3^{(0)} = \eta_4^{(0)} - \frac{1}{2} \Delta \eta_3^{(0)} - \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_2^{(0)} - \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_1^{(0)}$$

и, наконец,

$$y_4^{(0)} = y_3 + \Delta y_3^{(0)}.$$

Имея $y_4^{(0)}$, вычисляем следующее приближение для той же косой строки по формулам:

$$\eta_4^{(1)} = hf(x_4, y_4^{(0)}),$$

$$\Delta \eta_3^{(1)} = \eta_4^{(1)} - \eta_3, \quad \Delta^2 \eta_2^{(1)} = \Delta \eta_3^{(1)} - \Delta \eta_2, \quad \Delta^3 \eta_1^{(1)} = \Delta^2 \eta_2^{(1)} - \Delta^2 \eta_1,$$

и вычисляем $\Delta y_3^{(1)}$ по формуле (1.74); теперь $y_4^{(1)} = y_3 + \Delta y_3^{(1)}$. По известному теперь значению $y_4^{(1)}$ находим $\eta_4^{(2)} = hf(x_4, y_4^{(1)})$ и т. д. Процесс повторяем до совпадения величин $\eta_4^{(m-1)}$ и $\eta_4^{(m)}$.

Пример 10. Рассмотрим пример 9 предшествующего п. 4. Исходной для нас является таблица 6 (см. стр. 46).

Полагаем $\Delta^3 \eta_1^{(0)} = 0,00001$, тогда

$$\begin{aligned} \Delta^2 \eta_2^{(0)} &= 0,00202; & \Delta \eta_3^{(0)} &= 0,00703; & \eta_4^{(0)} &= 0,01604; \\ \Delta y_3^{(0)} &= 0,01604 - \frac{1}{2} \cdot 0,00703 - \frac{1}{12} \cdot 0,00202 - \frac{1}{24} \cdot 0,00001 = 0,01235; \\ y_4^{(0)} &= 0,00900 + 0,01235 = 0,02135. \end{aligned}$$

Вычислим первое приближение. Имеем:

$$\begin{aligned} \eta_4^{(1)} &= 0,1 (x_4^2 + y_4^{(0)2}) = 0,01605, \\ \Delta \eta_3^{(1)} &= 0,01605 - 0,00901 = 0,00704, \\ \Delta^2 \eta_2^{(1)} &= 0,00704 - 0,00501 = 0,00203, \\ \Delta^3 \eta_1^{(1)} &= 0,00203 - 0,00201 = 0,00002. \end{aligned}$$

Теперь

$$\begin{aligned} \Delta y_3^{(1)} &= 0,01605 - \frac{1}{2} \cdot 0,00704 - \frac{1}{12} \cdot 0,00203 - \frac{1}{24} \cdot 0,00002 = 0,01236, \\ y_4^{(1)} &= 0,00900 + 0,01236 = 0,02136. \end{aligned}$$

Вычисляя $\eta_4^{(2)} = 0,1 (0,4^2 + y_4^{(1)2})$, получим прежнее значение 0,01605; можно, следовательно, положить $y_4 = y_4^{(1)} = 0,02136$. Теперь можно дополнить нашу таблицу значениями $y_4, \Delta y_3, \eta_4, \dots, \Delta^3 \eta_1$ и перейти к вычислению значения y_5 . Отметим, что полученное нами значение y_4 совпадает с тем, которое дает довольно точная формула $y(x) \approx \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$. Метод Рунге—Кутты дает (см. п. 3) значение $y_4 = 0,021359$.

6. Другие разностные методы. Можно получать экстраполяционные формулы, отличные от формулы Адамса, если исходить, например, из формулы

$$y_{n+1} = y_{n-s} + \int_{x_{n-s}}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx, \quad (1.61')$$

в которой s —какое-либо натуральное число, и затем заменить интеграл в (1.61') его приближенным значением по какой-нибудь квадратурной формуле с узлами в точках $x_{n-s}, x_{n-s+1}, \dots, x_n, x_{n+1}$; можно, в частности, заменить функцию $f(x, y(x))$ ее интерполяционным многочленом на отрезке $x_{n-k} \leq x \leq x_{n+1}$. При $s=1$ получается так

называемая *экстраполяционная формула Нистрема* [30]:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2\eta_n + \frac{1}{3} \nabla^2 \eta_n + \frac{1}{3} \nabla^3 \eta_n + \frac{29}{30} \nabla^4 \eta_n + \\ + \frac{14}{45} \nabla^5 \eta_n + \dots, \quad (1.75)$$

где ∇ — разность, взятая назад, так что, например,

$$\nabla \eta_n = \eta_n - \eta_{n-1}, \quad \nabla^2 \eta_n = \eta_n - 2\eta_{n-1} + \eta_{n-2}$$

и т. д.

Можно так же строить интерполяционные формулы, зачастую более точные, чем интерполяционная формула Адамса, хотя и требующие более сложных итераций. Для этого достаточно в формуле (1.61) или (1.61') заменить функцию $f(x, y(x))$ многочленом, интерполирующим ее на отрезке $[x_{n-k}, x_{n+p}]$, где $p > 1$. Употребительны так называемые *формулы типа Коуэлла*:

$$\Delta y_n = \frac{\eta_{n+1} + \eta_n}{2} + a_1 \frac{\Delta^2 \eta_n + \Delta^2 \eta_{n-1}}{2} + a_2 \frac{\Delta^4 \eta_{n-1} + \Delta^4 \eta_{n-2}}{2} + \dots \\ \dots + a_k \frac{\Delta^{2k} \eta_{n-k+1} + \Delta^{2k} \eta_{n-k}}{2}, \quad (1.76)$$

$$a_j = \frac{1}{(2j)!} \int_0^1 (t+j-1)(t+j-2)\dots t(t-1)\dots(t-j) dt.$$

Значения первых коэффициентов a_j таковы:

$$a_1 = -\frac{1}{12}, \quad a_2 = \frac{11}{720}, \quad a_3 = \frac{191}{60480}.$$

При $k=2$ формула (1.76) принимает вид

$$\Delta y_n = \frac{\eta_{n+1} + \eta_n}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 \eta_n + \Delta^2 \eta_{n-1}}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 \eta_{n-1} + \Delta^4 \eta_{n-2}}{2}. \quad (1.77)$$

Изложим кратко ход вычислений по формуле (1.77); в общем случае формулы (1.76) вычисления протекают аналогично. Пусть мы как-нибудь нашли значения y_1, y_2, y_3, y_4 (в общем случае формулы (1.76) — значения y_1, y_2, \dots, y_{2k}). Наша ближайшая цель — вычислить y_5 . Составим следующую таблицу:

Таблица 10.

x	y	Δy	η	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$	$\Delta^4 \eta$
x_0	y_0		η_0				
		Δy_0		$\Delta \eta_0$			
x_1	y_1		η_1		$\Delta^2 \eta_0$		
		Δy_1		$\Delta \eta_1$		$\Delta^3 \eta_0$	
x_2	y_2		η_2		$\Delta^2 \eta_1$		$\Delta^4 \eta_0$
		Δy_2		$\Delta \eta_2$		$\Delta^3 \eta_1$	
x_3	y_3		η_3		$\Delta^2 \eta_2$		$\Delta^4 \eta_1$
		Δy_3		$\Delta \eta_3$		$\Delta^3 \eta_2$	
x_4	y_4		η_4		$\Delta^2 \eta_3$		$\Delta^4 \eta_2$
				$\Delta \eta_4$		$\Delta^3 \eta_3$	
x_5			η_5		$\Delta^2 \eta_4$		$\Delta^4 \eta_3$
				$\Delta \eta_5$		$\Delta^3 \eta_4$	
x_6			η_6		$\Delta^2 \eta_5$		
				$\Delta \eta_6$			
x_7			η_7				

Величины, расположенные в таблице 10 под ступенчатой линией, неизвестны — они зависят от еще не вычисленных величин y_5 , y_6 , y_7 . Положим в формуле (1.77) $n = 4$:

$$\Delta y_4 = \frac{\eta_5 + \eta_4}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 \eta_4 + \Delta^2 \eta_3}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 \eta_3 + \Delta^4 \eta_2}{2};$$

некоторые величины, входящие в правую часть последнего уравнения, неизвестны, и мы будем решать это уравнение итерациями.

Чтобы построить начальное приближение, выберем как-нибудь начальные значения четвертых разностей. Проще всего положить

$$\Delta^4 \eta_1^{(0)} = \Delta^4 \eta_2^{(0)} = \Delta^4 \eta_3^{(0)} = \Delta^4 \eta_0.$$

Теперь легко вычисляются $\Delta^3 \eta_2^{(0)}$, $\Delta^3 \eta_3^{(0)}$ и все остальные неизвестные величины в таблице 10. Полагаем

$$\Delta y_4^{(0)} = \frac{\eta_5^{(0)} + \eta_4}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 \eta_4^{(0)} + \Delta^2 \eta_3^{(0)}}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 \eta_3^{(0)} + \Delta^4 \eta_2^{(0)}}{2}$$

и $y_5^{(0)} = y_4 + \Delta y_4^{(0)}$. Вычисляем величину

$$\eta_5^{(1)} = hf(x_5, y_5^{(0)}).$$

Если $\eta_5^{(1)} = \eta_5^{(0)}$, то полагаем $y_5 = y_5^{(0)}$, вставляем известные уже числа в таблицу 10 в косую строку под ступенчатой линией, и переходим к вычислению y_6 . Если же $\eta_5^{(1)} \neq \eta_5^{(0)}$, то строим следующее приближение $y_5^{(1)}$. Для этого вычисляем элементы первой косой строки под ступенчатой линией:

$$\begin{aligned} \eta_5^{(1)} &= hf(x_5, y_5^{(0)}), \quad \Delta \eta_4^{(1)} = \eta_5^{(1)} - \eta_4, \quad \Delta^2 \eta_3^{(1)} = \Delta \eta_4^{(1)} - \Delta \eta_3, \\ \Delta^3 \eta_2^{(1)} &= \Delta^2 \eta_3^{(1)} - \Delta^2 \eta_2, \quad \Delta^4 \eta_1^{(1)} = \Delta^3 \eta_2^{(1)} - \Delta^3 \eta_1. \end{aligned}$$

Выбираем приближения для $\Delta^4 \eta_2^{(1)}$ и $\Delta^4 \eta_3^{(1)}$; можно, например, принять

$$\Delta^4 \eta_2^{(1)} = \Delta^4 \eta_3^{(1)} = \Delta^4 \eta_1^{(1)}.$$

Теперь можно вычислить все элементы таблицы 10, расположенные под ступенчатой линией, и определить величины

$$\Delta y_4^{(1)} = \frac{\eta_5^{(1)} + \eta_4}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 \eta_4^{(1)} + \Delta^2 \eta_3^{(1)}}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 \eta_3^{(1)} + \Delta^4 \eta_2^{(1)}}{2}$$

и $y_5^{(1)} = y_4 + \Delta y_4^{(1)}$. Теперь вычисляем

$$\eta_5^{(2)} = hf(x_5, y_5^{(1)});$$

если $\eta_5^{(2)} = \eta_5^{(1)}$, то полагаем $y_5 = y_5^{(1)}$ и переходим к вычислению y_6 , в противном случае повторяем процесс.

7. Разностные методы для систем и для уравнений высших порядков. В случае системы уравнений первого порядка разностные методы приводят, по существу, к тем же формулам, что и для одного уравнения. Так, если мы остановимся на задаче Коши (1.12), (1.13) и введем обозначения

$$\eta_j = hf(x_j, y_j, z_j), \quad \zeta_j = h\varphi(x_j, y_j, z_j), \quad (1.78)$$

то мы придем к следующим приближенным формулам.

Экстраполяционная формула Адамса:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_n &= \eta_n + \frac{1}{2} \Delta \eta_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_{n-3} + \dots, \\ \Delta z_n &= \zeta_n + \frac{1}{2} \Delta \zeta_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \zeta_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \zeta_{n-3} + \dots \end{aligned} \right\} (1.79)$$

Интерполяционная формула Адамса:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_n &= \eta_{n+1} - \frac{1}{2} \Delta \eta_n - \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_{n-2} - \dots, \\ \Delta z_n &= \zeta_{n+1} - \frac{1}{2} \Delta \zeta_n - \frac{1}{12} \Delta^2 \zeta_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 \zeta_{n-2} - \dots \end{aligned} \right\} (1.80)$$

Интерполяционная формула типа Коуэлла:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_n &= \frac{\eta_{n+1} + \eta_n}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 \eta_n + \Delta^2 \eta_{n-1}}{2} + \\ &\quad + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 \eta_{n-1} + \Delta^4 \eta_{n-2}}{2} - \dots, \\ \Delta z_n &= \frac{\zeta_{n+1} + \zeta_n}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 \zeta_n + \Delta^2 \zeta_{n-1}}{2} + \\ &\quad + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 \zeta_{n-1} + \Delta^4 \zeta_{n-2}}{2} - \dots \end{aligned} \right\} (1.81)$$

Проводя вычисления по той или иной формуле (1.79)—(1.81), мы должны каждый раз заполнять две таблицы, аналогичные таблицам методов Адамса или Коуэлла для одного уравнения; в общем случае системы m уравнений первого порядка надо будет заполнять m таких таблиц.

Уравнение или система уравнений порядка выше первого легко сводится к системе уравнений первого порядка, к которой уже можно применить формулы (1.79)—(1.81). Мы

остановимся здесь только на задаче Коши для одного дифференциального уравнения вида

$$y'' = f(x, y), \quad y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0. \quad (1.82)$$

В этом случае можно указать разностные формулы, так называемые *экстраполяционную и интерполяционную формулы Штёрмера*, которые позволяют заполнять только одну таблицу. Положим

$$\xi_j = h^2 f(x_j, y_j). \quad (1.83)$$

Экстраполяционная формула Штёрмера имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 y_{n-1} &= \xi_n + \alpha_2 \Delta^2 \xi_{n-2} + \alpha_3 \Delta^3 \xi_{n-3} + \dots + \alpha_k \Delta^k \xi_{n-k}, \\ \alpha_j &= \frac{1}{j} \int_{-1}^1 t(t+1) \dots (t+j-1) (1-|t|) dt. \end{aligned} \right\} \quad (1.84)$$

Приводим значения первых коэффициентов α_j .

Таблица 11
Значения коэффициентов α_j

j	2	3	4	5	6
α_j	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{19}{240}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{863}{12096}$

Ограничиваясь, например, значением $k=3$, имеем

$$\Delta^2 y_{n-1} = \xi_n + \frac{1}{12} \Delta^2 \xi_{n-2} + \frac{1}{12} \Delta^3 \xi_{n-3}. \quad (1.85)$$

Чтобы воспользоваться формулой (1.85), следует предварительно каким-либо способом вычислить y_1, y_2, y_3 . Тогда можно составить таблицу (см. таблицу 12, стр. 56), все элементы которой известны.

Таблица 12

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	ξ	$\Delta \xi$	$\Delta^2 \xi$	$\Delta^3 \xi$
x_0	y_0			ξ_0			
		Δy_0			$\Delta \xi_0$		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	ξ_1		$\Delta^2 \xi_0$	
		Δy_1			$\Delta \xi_1$		$\Delta^3 \xi_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	ξ_2		$\Delta^2 \xi_1$	
		Δy_2			$\Delta \xi_2$		
x_3	y_3			ξ_3			
x_4							
..
x_n							
	

Полагая в формуле (1.85) $n=3$, вычисляем величину

$$\Delta^2 y_2 = \xi_3 + \frac{1}{12} \Delta^2 \xi_1 + \frac{1}{12} \Delta^3 \xi_0.$$

Теперь можно найти y_4 :

$$y_4 = y_3 + \Delta y_2 + \Delta^2 y_2.$$

Заполняем в таблице 12 нижние косые строки числами $y_4, \Delta y_3, \Delta^2 y_2; \xi_4, \Delta \xi_3, \Delta^2 \xi_2, \Delta^3 \xi_1$. Тем же способом вычисляем y_5 и т. д.

Интерполяционная формула Штёрмера имеет вид

$$\Delta^2 y_{n-1} = \xi_n + \beta_2 \Delta^2 \xi_{n-1} + \beta_3 \Delta^3 \xi_{n-2} + \dots + \beta_{k+1} \Delta^{k+1} \xi_{n-k},$$

$$\beta_j = \frac{1}{j!} \int_{-2}^0 t(t+1) \dots (t+j-1)(1-|1+t|) dt;$$

первые значения β_j приведены в таблице 13.

Таблица 13

Значения коэффициентов β_j

j	2	3	4	5	6
β_j	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{240}$	$-\frac{1}{240}$	$-\frac{221}{60480}$

Если ограничиться значением $k=4$, то получится следующая формула:

$$\Delta^2 y_{n-1} = \xi_n + \frac{1}{2} \Delta^2 \xi_{n-1} - \frac{1}{240} \Delta^4 \xi_{n-3} - \frac{1}{240} \Delta^5 \xi_{n-4}.$$

Вычисления по интерполяционной формуле Штёрмера проводятся так же, как и по интерполяционной формуле Адамса.

Для задачи (1.82) можно строить и интерполяционные формулы типа Коуэлла.

8. Построение начала таблицы. Из изложенного в п. 4 следует, что для решения задачи Коши разностным методом необходимо иметь начало таблицы, содержащее, кроме y_0 (известного из начального условия), также несколько первых значений y_1, y_2, \dots, y_k .

Для построения начала таблицы предлагаются способы, которые в основном можно разбить на две группы: явные и итерационные.

Примеры явных способов.

а) Находя отрезок ряда Тейлора решения $y(x)$ (см. § 1, п. 1) и полагая в нем $x=h, x=2h, \dots, x=kh$, найдем y_1, y_2, \dots, y_k .

б) Исходя из x_0, y_0 методом Рунге—Кутта одно за другим определяются k значений y_1, y_2, \dots, y_k для $x = x_1, x_2, \dots, x_k$, где $x_j = x_0 + jh$.

Итерационные методы предлагают систему k уравнений для определения y_1, y_2, \dots, y_k , которая для достаточно малых значений h допускает решение методом итераций.

Способы этой группы отличаются друг от друга, по существу, лишь формой записи этой системы, последовательностью вычислений для проведения итерации и определением начального приближения для итерации.

Основания для получения системы уравнений таковы. Для любого целого числа r и любого целого положительного числа $k \geq 1$ можно указать такие числа $A_i^{(k, r)}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, k$), что для любого многочлена $P(x)$ степени не выше $k+1$ относительно x при произвольном $h > 0$ имеет место равенство

$$P(rh) - P(0) = h \sum_{i=0}^k A_i^{(k, r)} P'(ih).$$

Если бы решение $y(x)$ задачи Коши было многочленом степени не выше $k+1$, то в силу уравнения (1.1) имели бы, заменяя $y(x_i)$ на y_i и $y'(x_i)$ на $f(x_i, y_i)$,

$$y_r - y_0 = h \sum_{i=0}^k A_i^{(k, r)} f(x_i, y_i). \quad (1.86)$$

а) Полагая в (1.86) $r = 1, 2, \dots, k$, получим систему k уравнений [60]

$$y_r = y_0 + h \sum_{i=0}^k A_i^{(k, r)} f(x_i, y_i) \quad (r = 1, 2, \dots, k). \quad (1.87)$$

Система (1.87) для достаточно малых h имеет единственное решение, для которого y_1, y_2, \dots, y_k мало отличаются от y_0 , и это решение может быть получено методом итерации.

Начальное приближение $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_k^{(0)}$ можно получить, например, методом Эйлера.

Выпишем значения $A_i^{(k, r)}$ для $k = 1, 2, 3, 4; 0 \leq r \leq k$.

Таблица 14

Значения коэффициентов $A_i^{(k, r)}$ $k=1$

$r \backslash i$	0	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

 $k=2$

$r \backslash i$	0	1	2
1	$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{12}$	$-\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$

 $k=3$

$r \backslash i$	0	1	2	3
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}$

$k=4$

$r \backslash i$	0	1	2	3	4
1	$\frac{251}{720}$	$\frac{323}{360}$	$-\frac{11}{30}$	$\frac{53}{360}$	$-\frac{19}{720}$
2	$\frac{29}{90}$	$\frac{62}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{2}{45}$	$-\frac{1}{90}$
3	$\frac{27}{80}$	$\frac{51}{40}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{21}{40}$	$-\frac{3}{80}$
4	$\frac{14}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{14}{45}$

В простейшем случае ($k=1$) система превращается в одно уравнение

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)],$$

совпадающее с уравнением метода трапеций.

В случае $k=2$ система имеет вид

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{12} [5f(x_0, y_0) + 8f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)],$$

$$y_2 = y_0 + \frac{h}{3} [f(x_0, y_0) + 4f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)].$$

Последовательные приближения вычисляются по формулам¹⁾

$$y_1^{(m+1)} = y_0 + \frac{h}{12} [5f(x_0, y_0) + 8f(x_1, y_1^{(m)}) - f(x_2, y_2^{(m)})],$$

$$y_2^{(m+1)} = y_0 + \frac{h}{3} [f(x_0, y_0) + 4f(x_1, y_1^{(m+1)}) + f(x_2, y_2^{(m)})].$$

¹⁾ Если ожидается, что число итераций будет невелико (1—2 итерации), то в целях экономии вычислений допустимо заменить в правой части второй формулы $f(x_1, y_1^{(m+1)})$ на $f(x_1, y_1^{(m)})$.

б) Система (1.87) записывается в разностной форме. Для этого вводятся разности $\Delta y_r = y_{r+1} - y_r$ ($r = 0, 1, 2, \dots, k-1$), а также $\eta_j = hf(x_j, y_j)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, k$) и их разности до порядка k . Введем величины

$$B_i^{(k, r)} = A_i^{(k, r+1)} - A_i^{(k, r)} \quad (\text{считая } A_i^{(k, 0)} = 0).$$

Тогда система (1.87) вычитанием двух соседних уравнений легко преобразуется в такую:

$$\Delta y_r = \sum_{i=0}^k B_i^{(k, r)} \eta_i \quad (r = 0, 1, 2, \dots, k-1).$$

Каждое уравнение этой системы преобразуется следующим образом:

а) Если $i < r$, то η_i заменяется линейной комбинацией величин $\eta_r, \Delta \eta_{r-1}, \Delta^2 \eta_{r-2}, \dots, \Delta^{r-i} \eta_i$.

б) Если $i > r$, то η_i заменяется линейной комбинацией величин

$$\eta_r, \Delta \eta_{r-1}, \dots, \Delta^r \eta_0, \Delta^{r+1} \eta_0, \dots, \Delta^i \eta_0.$$

В результате такой замены приходят к уравнению

$$\Delta y_r = \eta_r + \sum_{i=1}^r D_i^{(r)} \Delta^i \eta_{r-i} + \sum_{i=r+1}^k D_i^{(r)} \Delta^i \eta_0. \quad (1.88)$$

Оказывается, что числа $D_i^{(r)}$ не зависят от выбора k . Приведем таблицу чисел $D_i^{(r)}$ для $1 \leq i \leq 5, 0 \leq r \leq 4$ (см. таблицу 15 на стр. 62).

Уравнения в форме (1.88) предложены А. Н. Крыловым [31].

Например, для $k=3$ система (1.88) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= \eta_0 + \frac{1}{2} \Delta \eta_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_0 + \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_0, \\ \Delta y_1 &= \eta_1 + \frac{1}{2} \Delta \eta_0 + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_0 - \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_0, \\ \Delta y_2 &= \eta_2 + \frac{1}{2} \Delta \eta_1 + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_0 + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_0. \end{aligned}$$

Таблица 15

Значения коэффициентов $D_i^{(r)}$

$r \backslash i$	1	2	3	4	5
0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{19}{720}$	$\frac{3}{160}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{11}{720}$	$-\frac{11}{1440}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{19}{720}$	$\frac{11}{1440}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$-\frac{3}{160}$
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$

Если после m шагов итерации получены значения $y_1^{(m)}$, $y_2^{(m)}$, $y_3^{(m)}$, то для получения следующего приближения $y_1^{(m+1)}$, $y_2^{(m+1)}$, $y_3^{(m+1)}$ предлагается поступать так: по известным $y_1^{(m)}$, $y_2^{(m)}$, $y_3^{(m)}$ вычисляются $\eta_1^{(m)}$, $\eta_2^{(m)}$, $\eta_3^{(m)}$; используя эти значения и известное значение η_0 , находят значения разностей, входящих в формулу (1.88). Это позволяет вычислить $\Delta y_r^{(m+1)}$ ($r=0, 1, 2$) и затем последовательно величины:

$$y_1^{(m+1)} = y_0 + \Delta y_0^{(m+1)}, \quad y_2^{(m+1)} = y_1^{(m+1)} + \Delta y_1^{(m+1)},$$

$$y_3^{(m+1)} = y_2^{(m+1)} + \Delta y_2^{(m+1)},$$

чем и заканчивается один шаг итерации. Процесс итерации

повторяется до тех пор, пока величины $|y_r^{(m+1)} - y_r^{(m)}|$ не сделаются достаточно малыми.

Начальное приближение $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, y_3^{(0)}$ для итерации можно получить по методу Эйлера.

Для получения более точного начального приближения можно рекомендовать прием, предложенный А. Н. Крыловым [31].

1) Полагают $\Delta y_0^{(1)} = \eta_0$.

2) Находят $y_1^{(1)} = y_0 + \eta_0$ (формула Эйлера).

3) Вычисляют $\eta_1^{(1)} = hf(x_1, y_1^{(1)})$.

4) Определяют разность $\Delta \eta_0^{(1)} = \eta_1^{(1)} - \eta_0$.

5) Находят приращения $\Delta y_0^{(2)}$ и $\Delta y_1^{(2)}$ по формулам

$$\Delta y_0^{(2)} = \eta_0 + \frac{1}{2} \Delta \eta_0^{(1)}, \quad \Delta y_1^{(2)} = \eta_1^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta \eta_0^{(1)}.$$

6) Находят $y_1^{(2)}$ и $y_2^{(2)}$: $y_1^{(2)} = y_0 + \Delta y_0^{(2)}$, $y_2^{(2)} = y_1^{(2)} + \Delta y_1^{(2)}$.

7) Вычисляют $\eta_1^{(2)} = hf(x_1, y_1^{(2)})$ и $\eta_2^{(2)} = hf(x_2, y_2^{(2)})$.

8) По величинам $\eta_0, \eta_1^{(2)}$ и $\eta_2^{(2)}$ находят разности:

$$\Delta \eta_0^{(2)} = \eta_1^{(2)} - \eta_0, \quad \Delta \eta_1^{(2)} = \eta_2^{(2)} - \eta_1^{(2)}, \quad \Delta^2 \eta_0^{(2)} = \Delta \eta_1^{(2)} - \Delta \eta_0^{(2)}.$$

9) Находят приращения $\Delta y_0^{(3)}, \Delta y_1^{(3)}, \Delta y_2^{(3)}$ по формулам:

$$\Delta y_0^{(3)} = \eta_0 + \frac{1}{2} \Delta \eta_0^{(2)} - \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_0^{(2)},$$

$$\Delta y_1^{(3)} = \eta_1^{(2)} + \frac{1}{2} \Delta \eta_0^{(2)} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_0^{(2)},$$

$$\Delta y_2^{(3)} = \eta_2^{(2)} + \frac{1}{2} \Delta \eta_1^{(2)} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_0^{(2)}.$$

10) Находят $y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, y_3^{(3)}$:

$$y_1^{(3)} = y_0 + \Delta y_0^{(3)}, \quad y_2^{(3)} = y_1^{(3)} + \Delta y_1^{(3)}, \quad y_3^{(3)} = y_2^{(3)} + \Delta y_2^{(3)}.$$

Величины $y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, y_3^{(3)}$ принимаются в качестве начального приближения для итерации системы уравнений (1.88) ($k=3$).

З а м е ч а н и е. Если $f(x, y)$ задается сложным аналитическим выражением, то естественно объем работы для численного решения задачи Коши оценивать числом вычисляемых (в процессе решения)

значений $f(x, y)$ и как бы пренебрегая другими вспомогательными вычислениями (образование разностей, умножение на коэффициенты $D_i^{(r)}$ и др.). Определение начального приближения по методу Эйлера требует (в случае $k=3$) трех вычислений $f(x, y)$, по методу Крылова — четырех вычислений. Так как более точное начальное приближение, как правило, сокращает число необходимых (для достижения предписанной точности) итераций, и каждый шаг итерации системы (1.88) требует четырехкратного вычисления $f(x, y)$, то, видимо, выгоднее начальное приближение находить по методу А. Н. Крылова.

9. Об устойчивости разностных методов. Будем рассматривать задачу Коши (1.1), (1.2). Применение любого разностного метода связано с погрешностью, вызываемой очевидными причинами: неточностью допущений, лежащих в основе вывода приближенной формулы; неточностью промежуточных действий и вызванными этим погрешностями округления; неточностью определения исходных значений y_1, y_2, \dots, y_k ; погрешностями итераций в случае применения интерполяционных формул. Так как значения y_n определяются рекуррентно, то не исключено, что с ростом n погрешность в определении y_n может накапливаться и превзойти допустимые пределы.

Отвлечемся от ошибок округления и будем считать, что как погрешность приближенной разностной формулы, так и погрешности исходных величин y_1, y_2, \dots, y_k достаточно малы. Если при возрастании n погрешность в определении y_n остается ограниченной, то разностная формула называется устойчивой; если же упомянутая погрешность может возрастать бесконечно при $n \rightarrow \infty$, то разностная формула называется неустойчивой.

Приведем критерий устойчивости разностной формулы. Будем считать, что эта формула имеет вид

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} - \sum_{j=0}^k \beta_j y_{n+j} = 0, \quad (1.89)$$

где α_j и β_j — вещественные числа, $\alpha_k \neq 0$. Отметим, что все приведенные выше разностные формулы имеют вид (1.89). Построим многочлены

$$\left. \begin{aligned} \varrho(z) &= \alpha_k z^k + \alpha_{k-1} z^{k-1} + \dots + \alpha_0, \\ \sigma(z) &= \beta_k z^k + \beta_{k-1} z^{k-1} + \dots + \beta_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.90)$$

Будем считать, что многочлены $q(z)$ и $\sigma(z)$ не имеют общих корней—в противном случае можно было бы упростить формулу (1.89), уменьшив в ней число k . Требование, чтобы при $h \rightarrow 0$ приближенное решение (в предположении, что оно вычислено без погрешности) равномерно сходилось к точному решению, налагает на многочлены (1.89) еще два условия:

$$q(1) = \sum_{j=0}^k \alpha_j = 0, \quad q'(1) = \sigma(1). \quad (1.91)$$

К равенствам (1.91) можно прийти также, исходя из требования, чтобы формула (1.89) была точна, когда $y(x)$ есть полином первой степени и, следовательно, $f(x, y) = \text{const}$.

При указанных условиях разностная формула (1.89) устойчива тогда и только тогда, когда все корни многочлена $q(z)$ расположены внутри или на окружности круга $|z| \leq 1$ комплексной z -плоскости, причем корни, расположенные на границе, т. е. равные единице по модулю, должны быть простыми.

Все приведенные в пп. 4—7 разностные формулы устойчивы.

Приведем пример неустойчивой разностной формулы; такова формула

$$y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = 4\eta_{n+1} + 2\eta_n. \quad (1.92)$$

В данном случае

$$q(z) = z^2 + 4z - 5, \quad \sigma(z) = 4z + 2;$$

многочлены $q(z)$ и $\sigma(z)$ не имеют общих корней, и $q(1) = 0$, $q'(1) = \sigma(1) = 6$. Корни многочлена $q(z)$ суть 1 и -5 ; второй корень больше единицы по модулю, и формула (1.92) неустойчива. Чтобы удостовериться в этом, будем по формуле (1.92) решать задачу Коши

$$y' = y, \quad y|_{x=0} = 1,$$

точное решение которой есть $y = e^x$. Положим $h = 0,1$. Чтобы привести вычисления по формуле (1.92), надо знать значение $y_1 = y(0,1)$. Примем за y_1 значение $y(0,1) = e^{0,1}$, вычисленное с шестью верными десятичными знаками: $y_1 = 1,105171$. Проведя вычисления, найдем $y_{10} = y(1) = 2,7182818$; погрешность, которая при $n = 1$ была меньше чем 10^{-6} , теперь имеет значение

$$|y(1) - y_{10}| = e + 0,284254 = 3,002536.$$

Для уравнения второго порядка вида $y'' = f(x, y)$ при начальных условиях

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0$$

исследована устойчивость разностных формул вида

$$y_{n+1} - \sum_{j=0}^k A_j y_{n-j} - h^2 \sum_{j=-1}^k B_j f(x_{n-j}, y_{n-j}) = 0. \quad (1.93)$$

На коэффициенты формулы (1.93) накладывается требование, чтобы она была точной для дифференциального уравнения $y'' = 0$; отсюда вытекают соотношения

$$\sum_{j=0}^k A_j = 1, \quad \sum_{j=0}^k j A_j = -1. \quad (1.94)$$

Разностная формула (1.93) устойчива тогда и только тогда, когда корни многочлена

$$z^{k+1} - \sum_{j=0}^k A_j z^j = 0 \quad (1.95)$$

удовлетворяют тому же условию, которое было выше сформулировано для многочлена $q(z)$: либо корни меньше единицы по модулю, либо они равны единице по модулю, но тогда они простые.

10. Погрешность формул Адамса. Мы ограничимся в этом пункте формулами Адамса, как наиболее употребительными; о погрешности других разностных формул см. [2] и [73].

Обе формулы Адамса, как экстраполяционная, так и интерполяционная, могут быть записаны в виде одной формулы:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=-1}^k \beta_j f(x_{n-j}, y_{n-j}); \quad (1.96)$$

для экстраполяционной формулы Адамса $\beta_{-1} = 0$, для интерполяционной формулы $\beta_{-1} > 0$. Будем считать, что исходные величины y_1, y_2, \dots, y_k заданы каждая с погрешностью, не превосходящей некоторого заданного числа ε . Величины y_{k+1}, y_{k+2}, \dots определяются из уравнения (1.96) с некоторой погрешностью, вызванной ошибками округления, по-

грешностью исходных величин y_1, y_2, \dots, y_k и, наконец, погрешностью самой формулы Адамса. Пусть мы фактически вычислили некоторые величины \tilde{y}_n ; они, очевидно, удовлетворяют уравнению вида

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h \sum_{j=-1}^k \beta_j f(x_{n-j}, y_{n-j}) + \Gamma_n, \quad (1.97)$$

где Γ_n — ошибка округления в уравнении (1.96) и $\tilde{y}_j = y_j$ ($j=0, 1, 2, \dots, k$). С другой стороны, если $y(x)$ есть точное решение задачи Коши, то $y(x_n)$ не удовлетворяет точно приближенному уравнению (1.96); введя соответствующую поправку, которую мы обозначим через R_n , мы можем считать, что $y(x_n)$ точно удовлетворяет уравнению

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \sum_{j=-1}^k \beta_j f(x_{n-j}, y(x_{n-j})) + R_n. \quad (1.98)$$

Обозначим

$$\epsilon_n = y(x_n) - \tilde{y}_n. \quad (1.99)$$

Задача состоит в оценке величины $|\epsilon_n|$.

Обозначим через K постоянную Липшица функции $f(x, y)$; можно положить

$$K = \max \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|.$$

Пусть нам известны верхние границы величин $|\Gamma_n|$ и $|R_n|$, т. е. такие постоянные Γ и R , что $|\Gamma_n| \leq \Gamma$ и $|R_n| \leq R$. Известно, что если решение $y(x)$ задачи (1.1), (1.2) имеет необходимое число непрерывных производных, то можно положить

$$R = ch^{r+2} \max |y^{(r+2)}(x)|,$$

где c — постоянная, а $r = k$ для экстраполяционной формулы и $r = k + 1$ для интерполяционной формулы Адамса. Положим еще

$$\sigma = \sum_{j=-1}^k |\beta_j| \quad (1.100)$$

и выберем h столь малым, чтобы было $h\beta_{-1}K < 1$; для экстраполяционной формулы Адамса последнее условие, очевидно, выполняется при любом h . Составим уравнение

$$(1 - h\beta_{-1}K) z^{k+1} - (1 + h\beta_0K) z^k - hK \sum_{j=1}^k |\beta_j| z^{k-j} = 0. \quad (1.101)$$

Доказывается, что оно имеет корень $z_1 > 1$; через этот корень и выражается искомая оценка:

$$|\varepsilon_n| \leq \varepsilon z_1^n + \frac{R + \Gamma}{hK\sigma} (z_1^n - 1). \quad (1.102)$$

Можно доказать (см. [73]), что при малых h верно приближенное равенство

$$z_1^n \approx e^{K\sigma(x_n - x_0)}$$

и, следовательно, ε_n остается ограниченным при возрастании n .

Оценка (1.102) обычно оказывается довольно грубой. Более точна рекуррентная формула для оценки погрешности. Пусть δ_n — верхняя граница величины $|\varepsilon_n|$, и пусть значения $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ нам известны. Тогда $\delta_n, n > k$, можно найти из рекуррентного соотношения

$$(1 - h\beta_{-1}K)\delta_{n+1} = (1 + h\beta_0K)\delta_n + hK \sum_{j=1}^k |\beta_j| \delta_{n-j} + R + \Gamma. \quad (1.103)$$

11. Сравнение численных методов. Основное достоинство метода Рунге—Кутта по сравнению с разностным методом состоит в том, что шаг h_n можно назначать произвольно в любом месте вычислений. Это обстоятельство используется для организации контроля вычислений и подбора шага, обеспечивающего назначенную точность вычислений [41]. Для начала вычислений по методу Рунге—Кутта не нужно строить начальную таблицу, что также является достоинством этого метода.

Для перехода от x_n к x_{n+1} по методу Рунге—Кутта требуется четырехкратное вычисление $f(x, y)$ (для основного приема); в то же время для любого экстраполяционного разностного метода для этой же цели требуется однократное вычисление $f(x, y)$, и это сравнение не в пользу метода Рунге—Кутта.

Этот недостаток метода Рунге—Кутта становится менее заметным при сравнении с интерполяционными разностными методами, требующими, как правило, не менее двухкратного вычисления при переходе от x_n к x_{n+1} .

По-видимому, достоинства метода Рунге—Кутта с появлением быстродействующих цифровых вычислительных машин стали оцениваться выше, и в настоящее время наблюдается тенденция более широкого использования метода Рунге—Кутта в работе вычислительных центров.

НЕКОТОРЫЕ ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Как аналитические, так и численные приближенные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений изложены в книгах [2], [31] и [89]; численные методы изложены еще в [30], [57], [73], [84]; см. также [22].

К п. 3 § 1. Некоторые сведения о применении метода Чаплыгина к различным задачам теории дифференциальных и интегральных уравнений, а также некоторые библиографические указания см. в статье [52]. Более подробно о методе Чаплыгина см. [2], [16], [31], [106].

К п. 5 § 1. Ряд интересных сведений о методе малого параметра можно найти в книге [31].

К п. 6 § 1. В этом пункте изложены некоторые результаты статьи С. М. Лозинского [50], упрощенные применительно к случаю одного уравнения первого порядка. Дальнейшее развитие идей того же автора см. [47]—[49], [51].

К п. 1 § 2. В статье [5] дано обоснование метода ломаных Эйлера для случая, когда функция $f(x, y)$ в дифференциальном уравнении (1.1) терпит конечный скачок на некоторых линиях в плоскости (x, y) , но между этими линиями удовлетворяет условию Липшица. Аналогичные результаты получены в [5] и для системы уравнений первого порядка.

К п. 6 § 2. Большое количество разностных формул приведено в книгах [59] и [60]; в ряде случаев приводятся дополнительные формулы, служащие для контроля или для уточнения результатов, даваемых основными формулами.

К п. 9 § 2. Понятие устойчивости разностных методов разработано в статье Г. Дальквиста [114], в которой даны также приведенные в тексте критерий устойчивости и пример неустойчивой разностной формулы; в статье [114] содержатся и другие результаты, связанные с понятием устойчивости. Основные результаты статьи [114] подробно изложены в [2] и более кратко в [73].

Устойчивость разностных формул для уравнения вида $y'' = f(x, y)$ исследована В. И. Крыловым в статье [32].

К п. 10 § 2. Погрешность метода Адамса была исследована в статье [124]; оценка погрешности более общих разностных формул вида

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n-j} + h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n-j}$$

дана в [107]. В статье [1] дана оценка погрешности формул того же вида в предположении, что известны функции $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$, удовлетворяющие неравенствам $Y_1(x) \leq y(x) \leq Y_2(x)$, $Y_1(x) \leq \bar{y}_m(x) \leq Y_2(x)$,

где $y(x)$ — точное решение задачи Коши (1.1), (1.2), а $\bar{y}_m(x)$ — точное решение задачи Коши для уравнения (1.1) при начальном условии $y|_{x=x_m} = y_m$, а y_m есть величина, даваемая разностной формулой. В статье [51] исследуется погрешность экстраполяционных формул.

ГЛАВА II МЕТОД СЕТОК

§ 1. Уравнения эллиптического типа

1. Сеточные уравнения. В этой главе рассмотрены сеточные методы приближенного решения основных задач математической физики.

Пусть Ω —конечная или бесконечная область n -мерного евклидова пространства E_n и Γ —граница области Ω . Пусть Lu —некоторый дифференциальный оператор (как правило, линейный) над функцией $u(X) = u(x_1, \dots, x_n)$, где $X = (x_1, \dots, x_n)$ —точка E_n . Ставится задача о разыскании функции $u(X)$, удовлетворяющей в каждой точке области Ω дифференциальному уравнению

$$Lu = f(X) \quad (2.1)$$

и одному или нескольким условиям на границе

$$l_i u|_{\Gamma_i} = \varphi_i(X) \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (2.2)$$

где Γ_i —части границы Γ , $l_i u$ —дифференциальные операторы. В уравнениях (2.1) и (2.2) $f(X)$ и $\varphi_i(X)$ —функции, заданные соответственно в Ω и на Γ_i . Если заданы область Ω , операторы L и l_i , то этим задается целый класс задач, для каждой из которых данными являются функции $f(X)$ и $\varphi_i(X)$. По этим данным требуется определить функцию $u(X)$.

Для приближенного решения задачи (2.1), (2.2) предложены различные методы, часть из которых называют сеточными.

К *сеточным* методам относятся те, в которых разыскивается таблица приближенных значений искомого решения в некоторой совокупности точек $X_k \in \Omega + \Gamma$ ($k = 1, 2, \dots$), называемой *сеткой*; отдельные точки X_k называются *узлами*

сетки. Иногда кроме узлов $X_k \in \Omega + \Gamma$ выбираются и вспомогательные узлы вне области Ω . Узлы $X_k \in \Omega + \Gamma$ будем называть *основными*. Уравнения, которые служат для определения искомых значений приближенного решения, называются *сеточными*. Основания для выбора сетки и получения сеточных уравнений отличают один сеточный метод от другого.

Мы будем предполагать, что каждый сеточный метод рекомендует бесконечную совокупность сеток Ω_h , зависящих от одного или нескольких положительных параметров, характеризующих плотность расположения узлов сетки. В дальнейшем этот параметр или группу параметров будем обозначать буквой h . Чем меньше h (параметры, составляющие h), тем гуще сетка Ω_h . Предполагается, что в совокупности $\{\Omega_h\}$ сеток можно выделить такую последовательность, что $h \rightarrow 0$. Те значения h , для которых существует соответствующая сетка Ω_h , назовем *допустимыми*.

Для примера рассмотрим часто употребляемую *прямоугольную* сетку. Пусть Ω — область плоскости Oxy . На этой плоскости проведем два семейства прямых, параллельных координатным осям: $x = ih_1$, $y = jh_2$, где h_1 и h_2 — произвольные положительные числа, $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Эти прямые разбивают всю плоскость на прямоугольники со сторонами h_1 и h_2 ; вершины этих прямоугольников называются *узлами* прямоугольной сетки. Через Ω_h обозначим совокупность узлов прямоугольной сетки, лежащих внутри или на границе области Ω . Может случиться, что никаких ограничений на h_1 и h_2 накладывать не надо; тогда допустимыми $h(h_1, h_2)$ будут любые положительные h_1 и h_2 . Может случиться, что область Ω ограничена, а предлагаемый сеточный метод требует наличия не менее определенного числа узлов в Ω ; тогда допустимыми будут все $h(h_1, h_2)$, где h_1 и h_2 ограничены сверху. Может случиться, что допустимыми будут только такие $h(h_1, h_2)$, что $h_1 = \frac{a}{N_1}$, $h_2 = \frac{b}{N_2}$, где a, b — положительные числа, N_1 и N_2 — произвольные положительные целые числа; так поступают, если Ω — прямоугольник со сторонами a и b , и желают, чтобы Ω была покрыта без остатка элементарными прямоугольниками сетки.

В этом параграфе будем предполагать, что область Ω конечна и для каждого допустимого h сетка Ω_h состоит из конечного числа N_h узлов.

В последующем u_h будет означать таблицу приближенных значений искомого решения. Эту таблицу будем называть *сеточной функцией*, а отдельные числа этой таблицы — *значениями сеточной функции в узлах*.

Для определения сеточной функции сеточный метод рекомендует систему сеточных уравнений, решением которой являются числа, образующие u_h . Эту систему в общем виде будем записывать так:

$$R_h u_h = f_h, \quad (2.3)$$

$$r_{ih} u_h = \varphi_{ih} \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (2.4)$$

считая, что уравнения (2.3) являются сеточной заменой дифференциального уравнения (2.1), а уравнения (2.4) являются сеточной заменой граничных условий (2.2). Систему (2.3), (2.4) будем называть *сеточными уравнениями для задачи* (2.1), (2.2).

В случае применения прямоугольных сеток для составления сеточных уравнений (2.3) часто употребляется прием *замены производных конечно-разностными отношениями*.

В последующем будут приведены примеры применения этого приема.

Естественно предъявить следующие требования к системе (2.3), (2.4).

1) Разрешимость системы (2.3), (2.4). Предположим, что задача (2.1), (2.2) имеет, и притом единственное, решение в некотором функциональном классе U . Для каждого допустимого h система (2.3), (2.4) должна иметь единственное решение $\{u_h(X_k^h)\}$, где X_k^h — узел с номером k в сетке Ω_h .

2) Сходимость к точному решению задачи. Сеточное решение $u_h(X_k^h)$ при $h \rightarrow 0$ должно в каком-то смысле стремиться к точному решению $u(X)$. Для описания этого требования введем следующие пространства и нормы (см. [13] и [104]):

а) пространство U функций, которому принадлежит точное решение $u(X)$ задачи (2.1), (2.2); в этом пространстве введена некоторая норма $\|u\|_U$;

б) под U_h будем понимать пространство, элементами которого являются совокупности N_h чисел и одним из элементов является сеточное решение системы (2.3), (2.4);

в пространстве U_h введена норма $\|u_h\|_{U_h}$ (какая-либо норма N_h -мерного векторного пространства U_h).

Согласование норм. Нормы $\|u\|_U$ и $\|u_h\|_{U_h}$ предполагаются согласованными в следующем смысле: каждую функцию $u(X) \in U$, поскольку ее значения известны также в основных узлах сетки Ω_h , можно рассматривать как элемент пространства U_h ; для любой функции $u(X) \in U$ должно иметь место следующее равенство:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u(X)\|_{U_h} = \|u(X)\|_U. \quad (2.5)$$

Величину $\|u_h - u(X)\|_{U_h}$ назовем *погрешностью* приближенного решения u_h по отношению к точному решению $u(X)$.

Будем говорить, что u_h *сходится* к точному решению $u(X)$, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u(X)\|_{U_h} = 0. \quad (2.6)$$

Оценка погрешности. Представляется интересным получить формулы, позволяющие оценить сверху погрешность $\|u_h - u(X)\|_{U_h}$. Дело обычно сводится к тому, что находят положительную функцию $\omega(h)$ от h и параметров, характеризующих точное решение (параметры области Ω , параметры краевых условий, модули производных точного решения и т. д.), стремящуюся к нулю при $h \rightarrow 0$, такую, что

$$\|u_h - u(X)\|_{U_h} \leq \omega(h). \quad (2.7)$$

Формула (2.7) позволяет судить не только о сходимости (2.6), но и о скорости убывания погрешности при $h \rightarrow 0$. В тех случаях, когда удается найти функцию $\omega(h)$, будем говорить, что *найдена оценка погрешности*.

В заключение этих общих рассуждений приведем пример составления сеточных уравнений для случая, когда задача (2.1), (2.2) есть задача Дирихле для эллиптического уравнения с двумя независимыми переменными.

При составлении этих уравнений будет употреблен уже упоминавшийся прием замены производных конечно-разностными отношениями.

Пусть Ω — конечная область плоскости Oxy , ограниченная простым, достаточно кусочно-гладким контуром Γ . Пусть a , b , c , d , g , f — достаточно гладкие функции в Ω , причем

$a > 0$, $b > 0$. Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} - gu = f. \quad (2.8)$$

Пусть на контуре Γ задана функция φ . Задача Дирихле ставится так: найти решение $u(x, y)$ уравнения (2.8), обращающееся в φ на Γ , т. е. удовлетворяющее условию

$$lu|_{\Gamma} \equiv u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi. \quad (2.9)$$

Введем обозначения: (i, j) — узел с координатами (ih_1, jh_2) , где i и j — целые числа; $(u)_{i,j}$ — значение функции в узле (i, j) ; $u_{i,j}$ — значение сеточной функции u_h в узле (i, j) .

Положим

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} &\approx \frac{(u)_{i+1,j} - (u)_{i-1,j}}{2h_1}, & \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} &\approx \frac{(u)_{i,j+1} - (u)_{i,j-1}}{2h_2}, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} &\approx \frac{(u)_{i+1,j} - 2(u)_{i,j} + (u)_{i-1,j}}{h_1^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} &\approx \frac{(u)_{i,j+1} - 2(u)_{i,j} + (u)_{i,j-1}}{h_2^2}. \end{aligned} \right\} (2.10)$$

Совокупность пяти узлов (i, j) , $(i+1, j)$, $(i, j+1)$, $(i-1, j)$, $(i, j-1)$ назовем *пятиточечной звездой* с центром в (i, j) (слово «пятиточечная» часто будем опускать). Примем следующую нумерацию узлов в звезде (рис. 1).

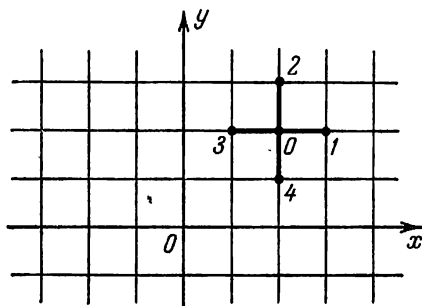


Рис. 1.

Через Ω_h обозначим совокупность всех узлов, лежащих в Ω или на Γ . Узел (i, j) назовем *внутренним*, если все узлы звезды с центром в (i, j) также принадлежат Ω_h и отрезки прямых, соединяющих центр с остальными узлами звезды, принадлежат Ω . Заменяя в (2.8) a, b, \dots на $(a)_{i,j}, (b)_{i,j}, \dots$ и производные от $u(x, y)$ на выражения, полученные из правых частей (2.10) заменой $(u)_{i,j}, (u)_{i+1,j}, \dots$ на $u_{i,j}, u_{i+1,j}, \dots$,

...

получим для каждого внутреннего узла соотношение

$$\begin{aligned}
 R_h u_h \equiv & (a)_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \\
 & + (b)_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} + (c)_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_1} + \\
 & + (d)_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_2} - (g)_{i,j} u_{i,j} = (f)_{i,j}, \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

которое будем считать сеточной заменой уравнения (2.8) во внутреннем узле (i, j) . Таких уравнений столько, сколько внутренних узлов в Ω_h .

Узел (i, j) назовем *граничным*, если хотя бы один узел звезды с центром в (i, j) не принадлежит Ω_h или хотя бы один отрезок, соединяющий центр с узлом звезды, пересекает Γ . Мы изложим несколько приемов замены уравнения (2.9) сеточными уравнениями.

1) Простой снос. Пусть узел (i, j) граничный, и пусть $Q_i, j \in \Gamma$ — ближайшая к (i, j) точка границы либо ближайшая в направлении координатных осей точка границы. Положим

$$r_h u_h \equiv u_{i,j} = \varphi(Q_i, j), \quad (2.12)$$

и, таким образом, значения u_h в граничных узлах известны сразу.

2) Учет граничного условия линейной интерполяцией (Коллатц [30]). Пусть (i, j) — граничный узел. Тогда хотя бы один из отрезков, соединяющих (i, j) с остальными узлами звезды с центром в (i, j) , пересекает Γ .

Пусть для определенности это будет отрезок к узлу $(i+1, j)$ (рис. 2), и пусть $Q \in \Gamma$ — ближайшая к (i, j) точка пересечения. Предполагается, что весь отрезок, соединяющий Q с $(i-1, j)$, принадлежит Ω . Если бы искомая функция $u(x, y)$

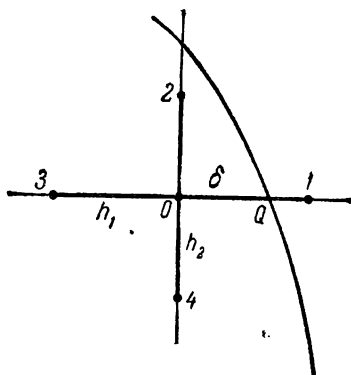


Рис. 2.

была линейной на этом отрезке, мы имели бы

$$\frac{(u)_{i,j} - (u)_{i-1,j}}{h_1} = \frac{u(Q) - (u)_{i,j}}{\delta},$$

где δ — расстояние от Q до (i, j) . Считая $u(Q) = \varphi(Q)$, получим уравнение для сеточной функции u_h :

$$\left(1 + \frac{\delta}{h_1}\right) u_{i,j} - \frac{\delta}{h_1} u_{i-1,j} = \varphi(Q),$$

вместо которого в общем виде будем писать

$$r_h u_h \equiv \left(1 + \frac{\delta}{h}\right) u_{i,j} - \frac{\delta}{h} u_{i',j'} = \varphi(Q), \quad (2.13)$$

понимая под h либо h_1 , либо h_2 в зависимости от того, какой оси параллелен отрезок, соединяющий Q с (i, j) , и считая (i', j') узлом звезды, лежащим на продолжении упомянутого отрезка. Каждому граничному узлу ставится в соответствие одно уравнение (2.13). Поэтому в системе, полученной объединением всех уравнений (2.11) и (2.13), число уравнений равно числу всех узлов в Ω_h и совпадает с числом неизвестных.

3) Запись уравнения в граничном узле (Микеладзе [58]). Для простоты будем считать, что $a \equiv b \equiv 1$, $c \equiv d \equiv g \equiv 0$, т. е. что оператор L есть оператор Лапласа, а уравнение (2.8) есть уравнение Пуассона:

$$Lu \equiv \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f. \quad (2.14)$$

Тогда соотношение (2.11) принимает вид

$$R_h u_h \equiv \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} = (f)_{i,j} \quad (2.15)$$

и для квадратной сетки ($h_1 = h_2 = h$) превращается в

$$\Delta_h u_h \equiv \frac{u_{i+1, j} + u_{i, j+1} + u_{i-1, j} + u_{i, j-1} - 4u_{i, j}}{h^2} = (f)_{i, j}. \quad (2.16)$$

Рассмотрим звезду с центром в некотором граничном узле, не лежащем на Γ . Граница Γ пересекает хотя бы один из лучей, идущих из центра к другим узлам звезды. Пусть $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ — расстояния от центра звезды в направлении лучей либо до ближайшего узла, либо до точки границы; например, δ_2 может оказаться равным h_2 либо меньше, чем h_2 . Пусть Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 — соответствующие точки на лучах; например, Q_2 может оказаться вторым узлом звезды либо точкой границы Γ . По значениям $u(Q_1), (u)_{i, j}, u(Q_3)$ составим интерполяционный многочлен и его вторую производную примем за приближенное значение $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i, j}$. Так получаем

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i, j} \approx 2 \left(\frac{u(Q_1)}{\delta_1(\delta_1 + \delta_3)} + \frac{u(Q_3)}{\delta_3(\delta_1 + \delta_3)} - \frac{(u)_{i, j}}{\delta_1 \delta_3} \right).$$

Найдя аналогично приближенное значение для $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i, j}$, сложив его эти приближенные значения и приравняв сумму значению $(f)_{i, j}$, получим сеточное уравнение, заменяющее (2.14) в граничном узле. Полученное уравнение преобразуем так: некоторые из точек Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 лежат на Γ , и поэтому значения $u(X)$ в этих точках известны и совпадают с $\varphi(X)$; соответствующие этим точкам слагаемые перенесем в правую часть и полученное уравнение разделим на сумму коэффициентов при перенесенных значениях. Считая для простоты сетку квадратной и предполагая, что для некоторого граничного узла на Γ лежат точки Q_2 и Q_3 (рис. 3), получим,

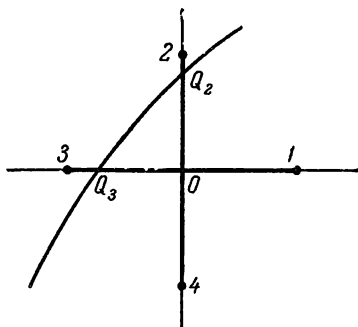


Рис. 3.

обозначая $\frac{\delta_2}{h} \equiv \delta'_2$, $\frac{\delta_3}{h} \equiv \delta'_3$,

$$r_h u_h \equiv \frac{(\delta'_2 + \delta'_3)(1 + \delta'_2)(1 + \delta'_3)}{A} u_{i,j} - \frac{\delta'_2 \delta'_3 (1 + \delta'_2)}{A} u_{i+1,j} - \\ - \frac{\delta'_2 \delta'_3 (1 + \delta'_3)}{A} u_{i,j-1} = \frac{\delta'_3 (1 + \delta'_3)}{A} \varphi(Q_2) + \frac{\delta'_2 (1 + \delta'_2)}{A} \varphi(Q_3) - \\ - \frac{\delta'_2 \delta'_3 (1 + \delta'_2)(1 + \delta'_3)}{2A} h^2 (f)_{i,j}, \quad (2.17)$$

где

$$A = \delta'_2 (1 + \delta'_2) + \delta'_3 (1 + \delta'_3).$$

Если граничный узел лежит на Γ и совпадает с точкой $Q \in \Gamma$, то полагаем

$$r_h u_h \equiv u_{i,j} = \varphi(Q). \quad (2.18)$$

В системе (2.11), (2.17), (2.18) число уравнений совпадает с числом всех узлов в Ω_h .

Предположим, что Ω_h такова, что каждый внутренний узел можно соединить хотя бы с одним граничным узлом ломаной, вершинами которой (кроме конца ломаной) являются внутренние узлы и каждый последующий узел которой принадлежит к звезде с центром в предыдущем узле.

Теорема 1. Пусть функции a, b, c, d, g удовлетворяют следующим условиям:

1) существует такое число $M > 0$, что для всех $(x, y) \in \Omega$

$$|c| < Ma, \quad |d| < Mb; \quad (2.19)$$

$$2) \quad g \geq 0. \quad (2.20)$$

Тогда системы линейных уравнений (2.11), (2.12) и (2.11), (2.13) однозначно разрешимы для любых h_1 и h_2 , удовлетворяющих неравенствам

$$h_1 < \frac{2}{M}, \quad h_2 < \frac{2}{M}. \quad (2.21)$$

Замечание 1. Для уравнения (2.8) можно также написать в граничном узле уравнение—аналог (2.17). В условиях теоремы 1 система линейных уравнений (2.11)—аналог (2.17)—однозначно разрешима.

З а м е ч а н и е 2. Вместо введенной выше пятиточечной звезды рассмотрим девятиточечную (рис. 4). Если в левой части уравнения (2.8) добавить слагаемое $2e(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ (считая $e^2 < ab$ — эллиптичность измененного уравнения), то соответствующее сеточное уравнение получится из (2.11) добавлением в левой части слагаемого

$$2(e)_{i,j} \frac{1}{2h_1} \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2h_2} - \frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{2h_2} \right) = \\ = (e)_{i,j} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1}}{2h_1 h_2}.$$

являющегося сеточной заменой для $2 \left(e \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j}$. Для граничных узлов (в смысле нового понятия звезды) примем уравнение (2.12) (простой снос). Разрешимость так полученной новой линейной системы (2.11), (2.12) еще не доказана.

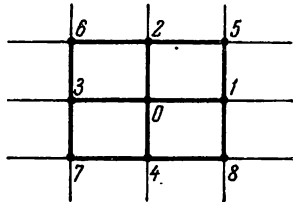


Рис. 4.

2. Аппроксимация точной задачи сеточной. а) Определения. Пусть U есть класс функций, к которому принадлежит точное решение $u(X)$ задачи (2.1), (2.2). Левая часть уравнения (2.1) есть оператор Lu , переводящий класс U

в некоторый класс F . Например, если L — оператор Лапласа и U — класс функций, m раз ($m \geq 2$) непрерывно дифференцируемых в Ω , то F есть класс функций, $m-2$ раз непрерывно дифференцируемых в Ω . Левая часть какого-либо из граничных условий (2.2), например $l_i u|_{\Gamma_i}$, есть оператор, переводящий U в некоторый класс Φ_i функций, определенных на части Γ_i границы Γ . Например, если U — класс функций, непрерывно дифференцируемых m раз ($m \geq 1$) в замкнутой области $\Omega + \Gamma$ и Γ_1 — достаточно гладкий кусок границы, а $l_1 u|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_1}$ — нормальная производная функции $u(X)$ в точках Γ_1 , то $l_1 u|_{\Gamma_1}$ переводит U в класс функций, $m-1$ раз непрерывно дифференцируемых и определенных на Γ_1 . Таким образом, операторы Lu , $l_1 u|_{\Gamma_1}$, ..., $l_s u|_{\Gamma_s}$ переводят U в классы Γ , Φ_1 , Φ_2 , ..., Φ_s функций, определенных соответственно в Ω , Γ_1 , Γ_2 , ..., Γ_s .

Пусть в каждом из этих классов введена норма. Эти нормы обозначим $\|f\|_F$, $\|\phi_1\|_{\Phi_1}$, ..., $\|\phi_s\|_{\Phi_s}$. Классы Γ , Φ_1 , ..., Φ_s

не предполагаются замкнутыми по вводимым нормам; предполагается лишь, что задача (2.1), (2.2) корректна (имеет место непрерывная зависимость решения $u(X)$ от данных $f, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$) [77], [98].

Введем сеточные аналоги классов F, Φ_1, \dots, Φ_s и соответствующих норм. Каждое уравнение системы (2.3), (2.4) будем считать записанным так, что левая часть является функцией значений искомого решения u_h в некоторых узлах и не зависит от $f, \varphi_1, \dots, \varphi_s$, а правая зависит только от функций $f, \varphi_1, \dots, \varphi_s$, т. е. является некоторым функционалом над группой функций $f, \varphi_1, \dots, \varphi_s$.

Пусть N_h^0 — число уравнений в системе (2.3), а N_h^i — число уравнений в i -й группе системы (2.4) ($i=1, 2, \dots, s$). Сеточную функцию u_h можно рассматривать как вектор N_h -мерного пространства U_h , где N_h — число всех узлов в Ω_h . Тогда совокупность всех левых частей системы (2.3) можно рассматривать как оператор, переводящий U_h в N_h^0 -мерное пространство F_h , а совокупность всех левых частей i -й группы системы (2.4) можно рассматривать как оператор, переводящий U_h в N_h^i -мерное пространство Φ_{ih} . Совокупность функционалов над группой $f, \varphi_1, \dots, \varphi_s$ в правых частях системы (2.3) можно рассматривать как оператор, переводящий произведение классов $F \times \Phi_1 \times \dots \times \Phi_s$ в F_h . Этот оператор обозначим через Π_h^0 . Аналогично через Π_h^i обозначим оператор, переводящий $F \times \Phi_1 \times \dots \times \Phi_s$ в Φ_{ih} и образованный функционалами в правых частях i -й группы системы (2.4).

Тогда система (2.3), (2.4) принимает вид

$$R_h u_h = \Pi_h^0(f, \varphi_1, \dots, \varphi_s), \quad (2.22)$$

$$r_{ih} u_h = \Pi_h^i(f, \varphi_1, \dots, \varphi_s) \quad (i=1, 2, \dots, s). \quad (2.23)$$

В векторных пространствах $F_h, \Phi_{1h}, \dots, \Phi_{sh}$ введем нормы, которые обозначим $\|f_h\|_{F_h}, \|\varphi_{1h}\|_{\Phi_{1h}}, \dots, \|\varphi_{sh}\|_{\Phi_{sh}}$.

Будем говорить, что нормы $\|f_h\|_{F_h}, \|\varphi_{1h}\|_{\Phi_{1h}}, \dots, \|\varphi_{sh}\|_{\Phi_{sh}}$ согласованы с функциональными нормами $\|f\|_F, \|\varphi_1\|_{\Phi_1}, \dots, \|\varphi_s\|_{\Phi_s}$, если для всякого набора функций $(f, \varphi_1, \dots, \varphi_s) \in F \times \Phi_1 \times \dots \times \Phi_s$ имеют место равенства

$$\left. \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \|\Pi_h^0(f, \varphi_1, \dots, \varphi_s)\|_{F_h} &= \|f\|_F, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \|\Pi_h^i(f, \varphi_1, \dots, \varphi_s)\|_{\Phi_{ih}} &= \|\varphi_i\|_{\Phi_i} \quad (i=1, 2, \dots, s). \end{aligned} \right\} (2.24)$$

З а м е ч а н и е 1. Обычно Π_h^0 не зависит от $\varphi_1, \dots, \varphi_s$; пример уравнения (2.17) показывает, что Π_h^1 зависит не только от φ , а также и от f .

З а м е ч а н и е 2. Если под нормой во всех вводимых функциональных классах и векторных пространствах понимать максимум модуля (функции, составляющих вектора), то уравнения (2.11), (2.12), (2.13), (2.17), (2.18) записаны так, что выполнены условия (2.24) согласования норм.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что уравнения (2.22), (2.23) *аппроксимируют* уравнения (2.1), (2.2) в классе U , если для каждой функции $u \in U$ имеют место равенства

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|R_h u - \Pi_h^0(Lu, l_1 u, \dots, l_s u)\|_{F_h} = 0, \quad (2.25)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|r_{ih} u - \Pi_h^i(Lu, l_1 u, \dots, l_s u)\|_{\Phi_{ih}} = 0 \quad (2.26)$$

$(i = 1, 2, \dots, s).$

Пусть $\alpha(h)$ [$\alpha_i(h)$] — некоторая положительная функция параметров, составляющих h , стремящаяся к нулю при $h \rightarrow 0$.

Будем говорить, что аппроксимация уравнения (2.1) [(2.2)] уравнением (2.22) [(2.23)] *оценивается* функцией $\alpha(h)$ [$\alpha_i(h)$], если для всякой функции $u \in U$ можно указать положительное число M [M_i] такое, что для каждого допустимого h имеет место неравенство

$$\|R_h u - \Pi_h^0(Lu, l_1 u, \dots, l_s u)\|_{F_h} \leq M \alpha(h) \quad (2.27)$$

$$[\|r_{ih} u - \Pi_h^i(Lu, l_1 u, \dots, l_s u)\|_{\Phi_{ih}} \leq M_i \alpha_i(h)]. \quad (2.28)$$

З а м е ч а н и е. Если h — единственный параметр и $\alpha(h) = h^q$ (q — положительное число), то говорят, что *порядок аппроксимации* уравнения (2.1) уравнением (2.22) *равен* q .

В последующих примерах норму в функциональных пространствах будем понимать как максимум модуля значений функции (равномерная норма), и в векторных пространствах как максимум модуля составляющих вектора.

П р и м е р 1. Для системы уравнений (2.11) составляющими вектора $R_h u_h$ являются значения левой части (2.11) для каждого внутреннего узла, а составляющими вектора Π_h^0 — значения $f(X)$ в этих узлах.

В последующем C^k будет означать класс функций, производные которых до порядка k включительно непрерывны

в замкнутой области $\Omega + \Gamma$. Пусть $U = C^4$ и (i, j) — внутренний узел (в смысле пятиточечной звезды) прямоугольной сетки Ω_h . Пользуясь формулой Тейлора, запишем значения функции $u(x, y)$ в узлах звезды через значения $u(x, y)$ и ее производных в центре звезды. Имеем, например,

$$\begin{aligned} (u)_{i+1, j} \equiv u((i+1)h_1, jh_2) &= (u)_{i, j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i, j} h_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i, j} h_1^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i, j} h_1^3 = (u)_{i, j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i, j} h_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i, j} h_1^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i, j} h_1^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i, j} h_1^4, \end{aligned}$$

где $\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)_{i, j}$ — значения производных в некоторых точках отрезка, соединяющего узлы (i, j) и $(i+1, j)$. Аналогичные выражения получаются для $(u)_{i-1, j}$ заменой h_1 на $-h_1$ и \sim на \approx .

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \frac{(u)_{i+1, j} - 2(u)_{i, j} + (u)_{i-1, j}}{h_1^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i, j} + \frac{h_1^2}{24} \left[\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i, j} + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i, j} \right], \\ \frac{(u)_{i+1, j} - (u)_{i-1, j}}{2h_1} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i, j} + \frac{h_1^2}{12} \left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i, j} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i, j} \right] \end{aligned}$$

и аналогичные выражения для $h_2^{-2} [(u)_{i, j+1} - 2(u)_{i, j} + (u)_{i, j-1}]$ и $(2h_2)^{-1} [(u)_{i, j+1} - (u)_{i, j-1}]$ (с очевидной заменой h_1 на h_2 и дифференцирования по x на дифференцирование по y).

Полученные таким образом четыре равенства помножим соответственно на $(a)_{i, j}$, $(c)_{i, j}$, $(b)_{i, j}$, $(d)_{i, j}$, сложим и к обоим частям прибавим еще $-(g)_{i, j}(u)_{i, j}$. В результате мы слева получим левую часть уравнения (2.11), т. е. $(R_h u)_{i, j}$, справа же — сумму значения $(Lu)_{i, j} = (\Pi_h^0(Lu))_{i, j}$ и слагаемых, содержащих множители h_1 и h_2 .

Обозначая через $M^{(k)}$ максимальную из норм производных порядка k функции $u(x, y)$, через A — максимальную из норм коэффициентов a, b, c, d уравнения (2.8), легко получим

$$\begin{aligned} |(R_h u)_{i, j} - (\Pi_h^0(Lu))_{i, j}| &= |(R_h u)_{i, j} - (Lu)_{i, j}| \leq \\ &\leq A \left(\frac{2M^{(4)}}{24} + \frac{2M^{(3)}}{12} \right) (h_1^2 + h_2^2), \end{aligned}$$

г. е.

$$\|R_h u - \Pi_h^0(Lu)\| \leq M(h_1^2 + h_2^2), \quad (2.29)$$

где

$$M = A \left(\frac{M^{(4)}}{12} + \frac{M^{(8)}}{6} \right).$$

Неравенство (2.29) означает, что аппроксимация уравнения (2.8) уравнением (2.11) оценивается функцией $\alpha(h) = h_1^2 + h_2^2$.

З а м е ч а н и е 1. Если U есть класс C^2 , то можно лишь утверждать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|R_h u - \Pi_h^0(Lu)\| = 0, \quad (2.30)$$

т. е. лишь наличие аппроксимации.

З а м е ч а н и е 2. Рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка: на отрезке $0 \leq x \leq 1$ найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$Lu \equiv u''(x) + c(x)u' - g(x)u = f(x) \quad (2.31)$$

и граничным условиям

$$u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta \quad (2.32)$$

$c(x)$, $g(x)$, $f(x)$ — заданные функции, α , β — заданные числа).

Для приближенного решения этой задачи методом сеток введем на отрезке $[0, 1]$ узлы x_k с шагом h : $x_k = x_0 + kh$. В частном случае, когда $x_0 = 0$, $h = \frac{1}{N}$ (N — целое положительное число), два из узлов x_0 и x_N совпадают с концами отрезка $[0, 1]$. В общем случае этого не будет. Узел x_k назовем внутренним, если узлы x_{k-1} и x_{k+1} принадлежат отрезку $[0, 1]$. Для внутренних узлов составим уравнение

$$(R_h u_h)_k \equiv \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} + c(x_k) \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h} - g(x_k)u_k = f(x_k). \quad (2.33)$$

Как и в примере 1, имеет место утверждение: если $u(x) \in C^4$, то уравнение (2.33) аппроксимирует уравнение (2.31) и аппроксимация оценивается функцией h^2 , т. е. порядок аппроксимации равен 2.

Пример 2. Для простоты будем считать сетку квадратной. Если узел (i, j) граничный, то ближайшая точка $Q_{i, j} \in \Gamma$ удалена от узла (i, j) на расстояние $\delta < h$. Поэтому для $u(x, y) \in C^1$ имеем

$$|(u)_{i, j} - u(Q_{i, j})| \leq M^{(1)}\delta < M^{(1)}h. \quad (2.34)$$

Это означает, что порядок аппроксимации уравнения (2.9) уравнением (2.12) равен 1. Этот вывод верен для C^k , где $k \geq 1$, так как C^k есть часть класса C^l при $k > l$.

Пусть (i, j) — граничный узел. Считая $u \in C^2$ и записывая по формуле Тейлора значения $u((i-1)h, jh)$ и $u(ih + \delta, jh)$ через значения $u(x, y)$ и производных в (i, j) , найдем для уравнения (2.13)

$$\begin{aligned} |(r_h u)_{i,j} - [\Pi_h^1(l, u)]_{i,j}| &= \left| \left[\left(1 + \frac{\delta}{h}\right) (u)_{i,j} - \frac{\delta}{h} (u)_{i-1,j} \right] - \right. \\ &\quad \left. - u(ih + \delta, jh) \right| \leq \frac{\delta}{2} \left| h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \delta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right| \leq M^{(2)} h^2, \quad (2.35) \end{aligned}$$

т. е. порядок аппроксимации уравнения (2.9) уравнением (2.13) равен 2. Легко убедиться, что порядок аппроксимации уравнения (2.9) (для уравнения (2.15)) уравнением (2.17) равен 3.

З а м е ч а н и е. Если для задачи (2.31), (2.32) выбрана сетка так, что $x_0 = 0$, $x_N = 1$, то сеточная замена краевых условий (2.32) такова:

$$u_0 = \alpha, \quad u_N = \beta, \quad (2.36)$$

и порядок аппроксимации уравнений (2.32) уравнениями (2.36) равен ∞ (отсутствие ошибки). Если же по каким-либо соображениям сетка выбрана так, что хотя бы один из концов $x=0$ и $x=1$ не является узлом, то сеточные замены для (2.32) можно строить простым сносом, линейной интерполяцией и способом Микеладзе. Выводы о порядке аппроксимации таковы же, как и для двумерной задачи.

б) Выбор сеточного уравнения, аппроксимирующего линейное дифференциальное уравнение. Пусть Lu — линейный дифференциальный оператор порядка p , коэффициенты которого определены в некоторой области Ω плоскости Oxy . Пусть в этой области выбрана некоторая сетка Ω_h . Совокупность нескольких узлов X_1, \dots, X_k и некоторую точку $X_0 \in \Omega$ назовем *звездой* с центром в X_0 (X_0 может совпадать с одним из узлов звезды). Пусть числа c_1, \dots, c_k подобраны так, что выражение

$$c_1 u(X_1) + \dots + c_k u(X_k)$$

совпадает с значением $Lu(X)$ в X_0 для всех целых рациональных функций некоторой степени $q > p$ относительно x, y . Тогда естественно считать, что уравнение

$$R_h u_h \equiv c_1 u_h(X_1) + \dots + c_k u_h(X_k) = f(X_0) \quad (2.37)$$

является сеточной заменой дифференциального уравнения (2.1) в X_0 . Для функции $u(X)$, не являющейся целой рациональной функцией степени q , разность

$$R_h u - (Lu)_{X_0} \equiv c_1 u(X_1) + \dots + c_k u(X_k) - (Lu)_{X_0},$$

вообще говоря, отлична от нуля.

Обозначим через h наименьшее расстояние между узлами звезды. Можно доказать (в предположении, что числа c_1, \dots, c_k определяются однозначно), что для $u(X) \in C^{q+1}$

$$|R_h u - (Lu)_{X_0}| \leq AM^{(q+1)} h^{q-p+1}, \quad (2.38)$$

где A — положительное число, зависящее только от коэффициентов оператора L и формы звезды (но не от размеров звезды).

Пусть теперь сетка Ω_h мельчает так, что звезда преобразованием подобия стягивается к центру. Тогда, если под Π_h^0 понимать $f(X_0)$, то неравенство (2.38) означает, что порядок аппроксимации уравнения (2.1) уравнением (2.37) равен $q - p + 1$.

Пусть $a_{\alpha_1, \alpha_2}(x, y)$ есть коэффициент при $\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} u}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}$ в записи оператора Lu . Тогда для определения коэффициентов c_1, \dots, c_k служит система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^k c_j (x_j - x_0)^{\alpha_1} (y_j - y_0)^{\alpha_2} = \begin{cases} \alpha_1! \alpha_2! a_{\alpha_1, \alpha_2}(x_0, y_0), & 0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq p, \\ 0, & p + 1 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq q, \end{cases} \quad (2.39)$$

где (x_j, y_j) — координаты точки X_j ($j = 0, 1, \dots, k$).

Не для всякого выбора звезды, оператора L и числа q полученная система имеет решение. Если звезда и оператор L выбраны, то целесообразно ставить вопрос о наибольшем значении q , для которого система (2.39) имеет решение.

В случае одномерных операторов (например, оператор (2.31)) система (2.39) всегда разрешима [30].

Как уже указывалось, в случае прямоугольных сеток для образования сеточных уравнений часто пользуются методом замены производных конечно-разностными отношениями. Если

сетка не прямоугольная, то можно воспользоваться описанным приемом «подбора коэффициентов» для получения уравнения (2.37).

В приводимых ниже примерах в качестве линейного оператора L выбран оператор Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Пример 3.1 Построим на плоскости правильную *треугольную* сетку. Для этого через точки $(ih, 0)$ оси Ox ($i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) проведем два семейства прямых, образующих с осью Ox углы в 60° и 120° , и семейство прямых, параллельных оси Ox и проходящих через точки пересечения прямых первых двух семейств. При этом плоскость покрывается множеством неналегающих равносторонних треугольников, вершины которых являются узлами так называемой *треугольной* сетки.

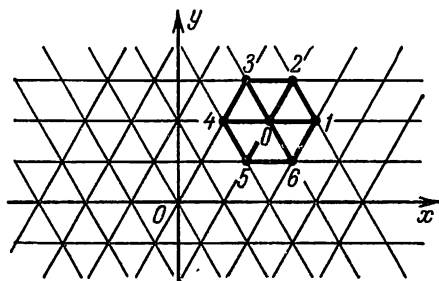


Рис. 5.

Звездой назовем совокупность семи узлов, являющихся центром и вершинами правильного шестиугольника, составленного из шести элементарных треугольников сетки (рис. 5). Присвоим узлам номера $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (0 —центр) и обозначим

где u_j —значение функции $u(x, y)$ в узле с номером j .

$$\tilde{\Delta}_h u \equiv \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 - 6u_0}{\frac{3h^2}{2}},$$

Имеет место формула

$$|\tilde{\Delta}_h u - (\Delta u)_0| \leq \frac{1}{4} M^{(4)} h^2, \quad (2.40)$$

и, следовательно, порядок аппроксимации уравнения $\Delta u = f$ уравнением $\tilde{\Delta}_h u_h = (f)_0$ в классе C^4 равен двум [25], [30].

2) Покроем плоскость неналегающими правильными шестиугольниками со стороной h и вершины будем считать узлами *шестиугольной* сетки. Звездой назовем совокупность четырех узлов, указанных на рис. 6 (на рис. 6 указаны две звезды с различным расположением узлов относительно осей координат). Обозначим

$$\tilde{\Delta}_h u \equiv \frac{4(u_1 + u_2 + u_3 - 3u_0)}{3h^2}.$$

Доказано, что

$$|\tilde{\Delta}_h u - (\Delta u)_0| \leq 1,36M^{(3)}h,$$

т. е. порядок аппроксимации уравнения $\Delta u = f$ уравнением $\tilde{\Delta}_h u_h = (f)_0$ в классе C^3 равен единице [25], [30].

Пример 4. Улучшение аппроксимации за счет расширения звезды. Для квадратной сетки и пятиточечной звезды порядок аппроксимации в классе C^4

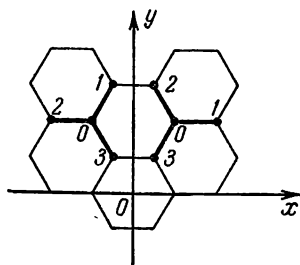


Рис. 6.

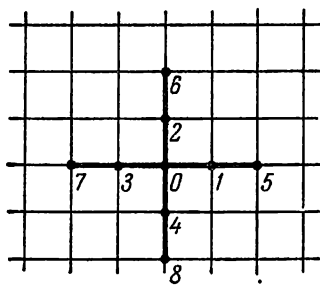


Рис. 7.

уравнения (2.14) уравнением (2.16) равен двум и $q=3$. Если взять девятиточечную звезду вида, изображенного выше на рис. 4, то оказывается, что коэффициенты c_0, c_1, \dots, c_8 нельзя подобрать так, чтобы $q \geq 4$. Если взять девятиточечную звезду вида, изображенного на рис. 7, то, полагая

$$\Delta'_h u_h \equiv \frac{16(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) - (u_5 + u_6 + u_7 + u_8) - 60u_0}{12h^2},$$

будем иметь

$$|\Delta'_h u - (\Delta u)_0| \leq \frac{4}{15}M^{(6)}h^4,$$

т. е. теперь порядок аппроксимации в классе C^6 уравнения (2.14) уравнением $\Delta'_h u_h = (f)_0$ равен 4 (теперь $q=5$).

О сеточных аппроксимациях оператора Лапласа см. [2], [25], [30], [54], [75], [116].

в) Улучшение аппроксимации за счет выбора оператора Π_h^0 . Многоточечные уравнения. В приведенных выше примерах оператор Π_h^0 ставил в

соответствие каждой звезде значение правой части $f(X)$ в центре звезды. Можно попытаться улучшить аппроксимацию за счет того, что Π_h^0 определяется как линейная комбинация значений $f(X)$ в узлах звезды. Пусть Lu , Ω , Ω_h и звезда определены так же как в б). Пусть числа $c'_1, \dots, c'_k, d_1, \dots, d_k$ подобраны так, что

$$c'_1 u(X_1) + \dots + c'_k u(X_k) - [d_1 (Lu)_{X_1} + \dots + d_k (Lu)_{X_k}] = 0 \quad (2.41)$$

для всех целых рациональных функций некоторой степени $q_1 > p$ относительно (x, y) . Тогда естественно считать, что уравнение

$$R_h u_h \equiv c'_1 u_h(X_1) + \dots + c'_k u_h(X_k) = d_1 f(X_1) + \dots + d_k f(X_k) \quad (2.42)$$

является сеточной заменой дифференциального уравнения (2.1). Считая центром звезды узел X_1 и предполагая, что удалось подобрать числа c_1, \dots, c_k так, что $R_h u_h$ в (2.37) совпадает с $(Lu)_{X_1}$ для всех целых рациональных функций степени q , и положив $c'_1 = c_1, \dots, c'_k = c_k, d_1 = 1, d_2 = d_3 = \dots = d_k = 0$, убедимся, что равенство (2.41) имеет место для всех целых рациональных функций степени q . Поэтому не исключена возможность и такого выбора c'_1, \dots, d_k , что то же равенство (2.41) будет иметь место для всех целых рациональных функций степени $q_1 > q$. Для определения коэффициентов c'_1, \dots, d_k служит система линейных однородных уравнений

$$\sum_{j=1}^k c'_j (x_j - x_1)^{\alpha_1} (y_j - y_1)^{\alpha_2} - \sum_{j=1}^k d_j \left(\sum_{v=0}^p \sum_{\substack{\beta_1 + \beta_2 = v \\ \beta_1 \leq \alpha_1, \beta_2 \leq \alpha_2}} a_{\beta_1, \beta_2}(x_j, y_j) \frac{\alpha_1!}{(\alpha_1 - \beta_1)!} \frac{\alpha_2!}{(\alpha_2 - \beta_2)!} \times \right. \\ \left. \times (x_j - x_1)^{\alpha_1 - \beta_1} (y_j - y_1)^{\alpha_2 - \beta_2} \right) = 0, \quad (2.43)$$

$$0 \leq \alpha_1, 0 \leq \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 \leq q_1,$$

от решения которой следует потребовать выполнения условия

$$\sum_{j=1}^k |d_j| = 1. \quad (2.44)$$

Если система (2.43), (2.44) однозначно разрешима, то для любой $u(x, y) \in C^{q_1+1}$ имеет место неравенство

$$|R'_h u - \Pi_h^0(Lu)| < CM^{(q_1+1)} h^{q_1-p+1}. \quad (2.45)$$

Уравнения вида (2.42) называются *многоточечными* сеточными уравнениями. Как следует из неравенства (2.45), порядок аппроксимации такими уравнениями уравнения (2.1) равен $q_1 - p + 1$.

З а м е ч а н и е. Пусть $\{\Omega_h\}$ — последовательность сеток с $h \rightarrow 0$. Пусть для каждого допустимого h образовано N_h^0 звезды и для каждой звезды записано уравнение вида (2.42). Тогда Π_h^0 есть оператор, переводящий функцию $f \in F$ в N_h^0 -мерный вектор. Если: а) F есть класс C^0 , б) выполняется соотношение (2.44) и для каждой звезды числа d_j имеют один и тот же знак, то нормы $\|f_h\|_{F_h}$ и $\|f\|_F$ согласованы.

П р и м е р 5. Уже отмечалось (пример 4), что для звезды рис. 4 нельзя подобрать коэффициенты c_0, c_1, \dots, c_8 , дающие лучшую аппроксимацию по сравнению с пятиточечной звездой. Числа

$$\begin{aligned} c'_0 &= -\frac{40}{12h^2}, & c'_1 &= c'_2 = c'_3 = c'_4 = \frac{2}{3h^2}, \\ c'_5 &= c'_6 = c'_7 = c'_8 = \frac{1}{6h^2}, & d_0 &= \frac{2}{3}, \\ d_1 &= d_2 = d_3 = d_4 = \frac{1}{12}, & d_5 &= d_6 = d_7 = d_8 = 0 \end{aligned}$$

удовлетворяют системе (2.43), (2.44) для $L = \Delta$ ($a_{00} = a_{10} = a_{01} = a_{11} = 0$, $a_{20} = a_{02} = 1$, $p = 2$, $q_1 = 5$), и поэтому сеточное уравнение

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_h u &\equiv \frac{4(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + (u_5 + u_6 + u_7 + u_8) - 20u_0}{6h^2} \\ &= \frac{2}{3}(f)_0 + \frac{1}{12}((f)_1 + (f)_2 + (f)_3 + (f)_4) \quad (2.46) \end{aligned}$$

аппроксимирует уравнение (2.14); можно доказать, что для $u(x, y) \in C^8$ имеет место неравенство

$$\left| \bar{\Delta}_h u - \left\{ \frac{2}{3} (\Delta u)_0 + \frac{1}{12} [(\Delta u)_1 + (\Delta u)_2 + (\Delta u)_3 + (\Delta u)_4] \right\} \right| \leq \frac{h^4}{45} M^{(6)}.$$

В книге [30] приведена таблица многоточечных формул для операторов Лапласа и бигармонического для квадратной и треугольной сеток, а также для одномерных операторов u' , u'' , u''' , u^{IV} .

Пример 6. Улучшение аппроксимации за счет выбора Π_h^0 , зависящих также от производных функций $f(X)$. Для девятиточечной звезды (см. рис. 4) и $u \in C^8$ легко получить на основании формулы Тейлора следующие формулы:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0 &= h^2 \left[(\Delta u)_0 + \frac{2h^2}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2h^4}{6!} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right)_0 + \frac{h^6}{8!} \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^6 \partial x^2} + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right)_0 \right], \\ u_5 + u_6 + u_7 + u_8 - 4u_0 &= h^2 \left[2(\Delta u)_0 + \frac{4h^2}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right)_0 + \frac{4h^4}{6!} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 15 \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right)_0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^6}{8!} \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} + \dots \right)_0 \right], \end{aligned}$$

где невыписанные слагаемые содержат производные восьмого порядка функции $u(x, y)$ в некоторых промежуточных точках лучей, соединяющих центр с точками 5, 6, 7, 8 звезды. Если первое из этих равенств умножить на 4 и сложить со вторым, то после деления на $6h^2$ получим

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_h u &\equiv \frac{4(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + (u_5 + u_6 + u_7 + u_8) - 20u_0}{6h^2} = \\ &= (\Delta u)_0 + \frac{h^2}{12} (\Delta^2 u)_0 + \frac{h^4}{360} \left[(\Delta^3 u)_0 + 2 \left(\frac{\partial^4 \Delta u}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_0 \right] + \\ &\quad + \frac{h^6}{6 \cdot 8!} \left[4 \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \dots \right) + \left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + \dots \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$\Delta^2 u \equiv \Delta(\Delta u) \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4},$$

$$\Delta^3 u \equiv \Delta(\Delta^2 u) \equiv \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 3 \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 3 \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}.$$

Если положить

$$(\Pi_h^0(f))_0 \equiv (f)_0 + \frac{h^2}{12} (\Delta f)_0 + \frac{h^4}{360} \left[(\Delta^2 f)_0 + 2 \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_0 \right],$$

то в классе C^6 порядок аппроксимации уравнения (2.14) уравнением

$$\bar{\Delta}_h u_h \leq \Pi_h^0(f) \quad (2.47)$$

равен шести и оценивается величиной $\frac{520h^6}{3 \cdot 8!} M^{(6)}$ [30].

Замечание 1. Левые части уравнений (2.46) и (2.47) совпадают.

Замечание 2. Если в примере 3 (треугольная сетка) положить $(\Pi_h^0(f))_0 = (f)_0 + \frac{h^2}{16} (\Delta f)_0$, то для $u \in C_6$ вместо оценки (2.40) справедлива оценка [25]:

$$|\bar{\Delta}_h u - \Pi_h^0(\Delta u)| \leq \frac{7h^4}{270} M^{(6)}.$$

Пример 7. Бигармоническое уравнение Пуассона. Так называется дифференциальное уравнение

$$\Delta^2 u \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y). \quad (2.48)$$

Для получения сеточного уравнения, аппроксимирующего уравнение (2.48), можно поступить следующим образом. Каждый узел (i, j) квадратной сетки будем считать центром тринадцатиточечной звезды, которая является объединением всех узлов пятиточечных звезд, имеющих центры во всех узлах пятиточечной звезды с центром в (i, j) (нумерацию узлов см. на рис. 8).

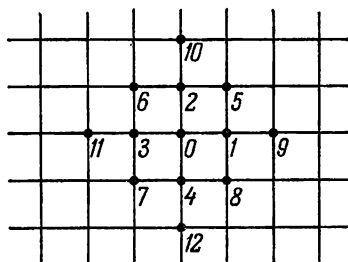


Рис. 8.

Если положить $\Delta_h^2 = \Delta_h(\Delta_h)$, то получим

$$\begin{aligned} \Delta_h^2 u_h &= \Delta_h(\Delta_h u_h) = \frac{1}{h^2} \left[\frac{u_9 + u_5 + u_0 + u_8 - 4u_1}{h^2} + \right. \\ &\quad + \frac{u_5 + u_{10} + u_6 + u_0 - 4u_2}{h^2} + \frac{u_0 + u_6 + u_{11} + u_7 - 4u_3}{h^2} + \\ &\quad \left. + \frac{u_8 + u_0 + u_7 + u_{12} - 4u_4}{h^2} - 4 \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0}{h^2} \right] = \\ &= \frac{1}{h^4} [20u_0 - 8(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + 2(u_5 + u_6 + u_7 + u_8) + \\ &\quad + (u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12})]. \end{aligned}$$

Пусть Ω_h — совокупность всех узлов квадратной сетки, попавших внутрь или на границу Γ области Ω , для которой решается уравнение (2.48). Для каждого внутреннего (в смысле тринадцатиточечной звезды) узла $(i, j) \in \Omega_h$ запишем уравнение

$$(\Delta_h^2 u)_{i, j} = (f)_{i, j}. \quad (2.49)$$

В классе C^6 порядок аппроксимации уравнения (2.48) уравнением (2.49) равен двум (оценивается величиной $\frac{10}{9} h^2 M^{(6)}$) [25].

3. Вопросы разрешимости, сходимости и оценки погрешности. а) Разрешимость сеточных уравнений. А. *Сеточный аналог принципа максимума.* Известно следующее свойство (*принцип максимума*) некоторых эллиптических операторов [61]: если функция $v(X)$ такова, что $Lv \geq 0$ в Ω , то $v(X)$ не может достигать в Ω положительного относительного максимума.

Для ряда сеточных операторов, возникающих при аппроксимации эллиптического дифференциального уравнения, имеет место свойство, которое можно назвать *сеточным аналогом принципа максимума*.

Занумеруем все узлы сетки Ω_h номерами от 1 до N_h ; эту нумерацию назовем общей. Каждый узел $X_j \in \Omega_h$ (с общим номером j) будем считать центром некоторой звезды и принадлежащим этой звезде; не исключено, что звезда состоит из одного узла — центра. Всякий узел звезды, от-

личный от центра, назовем *соседним* для центра. Пусть k_j — число соседних узлов для X_j ; занумеруем соседние для X_j узлы числами от 1 до k_j и эту нумерацию назовем внутренней. Через $j(i)$ обозначим общий номер узла, имеющего внутренний номер i в звезде с центром в X_j .

Пусть каждое уравнение сеточной системы имеет вид

$$(R_h u_h)_j \equiv A_j^{(1)} u_h(X_{j(1)}) + \dots + A_j^{(k_j)} u_h(X_{j(k_j)}) - \\ - A_j^{(0)} u_h(X_j) = F_j \quad (2.50) \\ (j = 1, 2, \dots, N_h),$$

где коэффициенты $A_j^{(i)}$ удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} A_j^{(i)} > 0 \quad (i = 0, 1, \dots, k_j), \\ \sum_{i=1}^{k_j} A_j^{(i)} \leq A_j^{(0)} \quad (j = 1, 2, \dots, N_h). \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Если узел X_j таков, что $\sum_{i=1}^{k_j} A_j^{(i)} = A_j^{(0)}$, то X_j назовем *узлом I рода*; если $\sum_{i=1}^{k_j} A_j^{(i)} < A_j^{(0)}$, то — *узлом II рода*.

Предположим: 1) имеется хотя бы один узел II рода; 2) если имеются узлы I рода, то каждый из них можно соединить ломаной хотя бы с одним узлом II рода так, что все вершины ломаной (кроме конца) суть узлы I рода и каждый последующий узел является соседом предыдущего (принадлежит звезде с центром в предыдущем узле).

Лемма 1. Если сеточная функция v_h такова, что

$$(R_h v_h)_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N_h),$$

то

$$v_h(X_j) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N_h).$$

Лемма 1'. Если сеточная функция v_h такова, что

$$(R_h v_h)_j \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N_h),$$

то

$$v_h(X_j) \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N_h).$$

Из лемм 1 и 1' получаем

Следствие. Если $(R_h v_h)_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, N_h$), то $v_h(X_j) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, N_h$).

Последнее означает, что однородная система, соответствующая системе (2.50) линейных уравнений, имеет лишь нулевое решение; как известно, отсюда следует отличие от нуля определителя системы и ее однозначная разрешимость. Отсюда

Теорема 2. Система (2.50) разрешима и имеет единственное решение (если выполнены указанные выше предположения о коэффициентах и узлах I и II рода).

Пример 8. Система (2.11), (2.12) однозначно разрешима. Действительно, каждое уравнение системы (2.11) можно записать в виде

$$(R_h u_h)_{i,j} \equiv A_{i,j}^{(1)} u_{i+1,j} + A_{i,j}^{(2)} u_{i,j+1} + A_{i,j}^{(3)} u_{i-1,j} + \\ + A_{i,j}^{(4)} u_{i,j-1} - A_{i,j}^{(0)} u_{i,j} = (f)_{i,j}, \quad (2.52)$$

причем коэффициенты $A_{i,j}^{(k)}$ ($k=0, 1, 2, 3, 4$) в силу условий (2.19), (2.20) и (2.21) теоремы 1 (предполагаем эти условия выполненными) удовлетворяют неравенствам

$$A_{i,j}^{(k)} > 0 \quad (k=0, 1, 2, 3, 4), \quad \sum_{k=1}^4 A_{i,j}^{(k)} \leq A_{i,j}^{(0)}.$$

Уравнения (2.12) можно переписать так: $-u_{i,j} = -\varphi(Q_{i,j})$, и, следовательно, здесь $A_{i,j}^{(0)} = -1$, а звезда состоит из одного центра. Граничные узлы являются узлами II рода. Кроме того, из предположений о сетке Ω_h для теоремы 1 следует наличие ломаной, соединяющей узлы I рода (если таковые есть) с узлами II рода.

Пример 9. Система (2.11), (2.13) однозначно разрешима. Уравнение (2.13) переписывается в виде

$$\frac{\delta}{h} u_{i',j'} - \left(1 + \frac{\delta}{h}\right) u_{i,j} = -\varphi(Q_{i,j}),$$

и если $\delta \neq 0$, то звезда с центром в (i, j) состоит из двух узлов: (i', j') и (i, j) . Так как $\frac{\delta}{h} < 1 + \frac{\delta}{h}$, то граничный узел является узлом II рода. Остальное, как в примере 8.

Пример 10. Сеточные уравнения (2.16), (2.17), (2.18) однозначно разрешимы.

Замечание. Пусть в уравнении (2.31) коэффициенты $c(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям: $|c(x)| < M$, $g(x) \geq 0$. Тогда для

$h < \frac{2}{M}$ система сеточных уравнений (2.33) для внутренних узлов и (2.36) для граничных узлов удовлетворяет принципу максимума и однозначно разрешима. То же можно утверждать, если граничные условия (2.32) учтены линейной интерполяцией или по способу Микеладзе.

Пример 11. Пусть для приближенного решения задачи Дирихле для уравнения $\Delta u - gu = f$ ($g \geq 0$ в Ω) применяют треугольную сетку (см. п. 2, пример 3, 1)) со стороной h . Для внутреннего узла (в смысле семиточечной звезды, рис. 5) имеем

$$\frac{2}{3h^2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6) - \left(\frac{4}{h^2} + (g)_0 \right) u_0 = (f)_0, \quad (2.53)$$

и, следовательно, внутренний узел является узлом I рода, если $(g)_0 = 0$, и узлом II рода, если $(g)_0 > 0$.

В каждом граничном узле значения u_h назначаются простым сносом. Так полученная система линейных уравнений однозначно разрешима.

Аналогичное заключение можно сделать для системы, полученной употреблением шестиугольной сетки (см. п. 2, пример 3, 2)).

З а м е ч а н и е. Также однозначно разрешима система уравнений

$$\frac{2}{3h^2} (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6) - \frac{4}{h^2} u_0 = \left(f + \frac{h^2}{16} \Delta f \right)_0$$

и (2.12), аппроксимирующих задачу Дирихле для $\Delta u = f$ (см. п. 2, замечание 2 к примеру 6).

Пример 12. Для приближенного решения задачи Дирихле для уравнения $\Delta u - gu = f$ ($g \geq 0$) применим прямоугольную сетку и девятиточечную звезду (см. рис. 4). Для каждой звезды, все узлы которой принадлежат Ω_h (для каждого внутреннего узла в смысле этой звезды), напомним многоточечное уравнение (см. п. 2, пример 5):

$$\frac{4(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + (u_5 + u_6 + u_7 + u_8) - 20u_0}{6h^2} = \frac{2}{3} ((f)_0 + (g)_0 u_0) + \frac{1}{12} [(f)_1 + (g)_1 u_1 + \dots],$$

получающееся из (2.46) заменой f на $f + gu$. Итак,

$$\begin{aligned} \frac{2}{3h^2} \left[\left(1 - \frac{h^2}{8} (g)_1 \right) u_1 + \left(1 - \frac{h^2}{8} (g)_2 \right) u_2 + \left(1 - \frac{h^2}{8} (g)_3 \right) u_3 + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{h^2}{8} (g)_4 \right) u_4 \right] + \frac{1}{6h^2} (u_5 + u_6 + u_7 + u_8) - \\ - \left(\frac{10}{3h^2} + \frac{2}{3} (g)_0 \right) u_0 = \frac{2}{3} (f)_0 + \frac{1}{12} [(f)_1 + (f)_2 + (f)_3 + (f)_4]. \quad (2.54) \end{aligned}$$

Для $h^2 < \frac{8}{\max g}$ коэффициенты при u_1, u_2, \dots, u_8 положительны, и в силу неотрицательности g их сумма не больше коэффициента

при u_0 , так как

$$\begin{aligned} \frac{2}{3h^2} \left[4 - \frac{h^2}{8} ((g)_1 + (g)_2 + (g)_3 + (g)_4) \right] + \frac{4}{6h^2} &= \\ = \frac{10}{3h^2} - \frac{1}{12} ((g)_1 + (g)_2 + (g)_3 + (g)_4) &\leq \frac{10}{3h^2} \leq \frac{10}{3h^2} + \frac{2}{3} (g)_0. \end{aligned}$$

Поэтому всякий внутренний узел является узлом I рода, если $g \equiv 0$, и может оказаться узлом II рода, если $g \geq 0$. Если в граничных узлах назначить u_h простым сносом, то система всех уравнений однозначно разрешима.

З а м е ч а н и е 1. Для решения уравнения Пуассона можно воспользоваться уравнением (2.47). Система (2.47), (2.12) однозначно разрешима, так как левые части (2.46) и (2.47) совпадают.

З а м е ч а н и е 2. Если в примерах 11 и 12 записать граничные уравнения по типу (2.13), то полученные системы будут также однозначно разрешимы.

П р и м е р 13. Пусть поставлена смешанная задача: найти решение $u(x, y)$ уравнения (2.8) при условии, что задано значение $u(x, y)$ на некоторой части Γ_1 границы Γ , а в каждой точке $Q \in \Gamma - \Gamma_1 = \Gamma_2$ задано значение $\psi(Q)$ производной от $u(x, y)$ по направлению $l(Q)$, образующему острый угол $\alpha(Q)$ с внутренней нормалью, не превышающий некоторой величины α_0 .

Для составления сеточных уравнений для квадратной сетки запишем во внутренних узлах (в смысле пятиточечной звезды) уравнение (2.11); в граничных узлах, для которых ближайшие точки границы лежат на Γ_1 , запишем уравнение (2.12) (простой снос). Пусть (i, j) — граничный узел, для которого ближайшая точка $Q_{i,j}$ границы принадлежит Γ_2 . Рассмотрим пятиточечную звезду с центром в (i, j) . Предположим, что среди узлов звезды, принадлежащих Ω_h , имеются два таких,

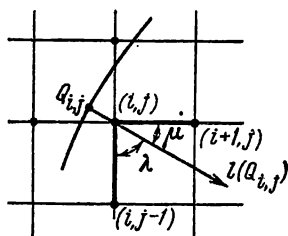


Рис. 9.

что лучи из (i, j) к этим узлам образуют острые углы μ и λ с $l(Q_{i,j})$; для определенности пусть это будут узлы $(i+1, j)$ и $(i, j-1)$ (рис. 9). Тогда для этого граничного узла запишем

$$\frac{\partial u}{\partial l(Q_{i,j})} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \cos \mu + \frac{u_{i,j-1} - u_{i,j}}{h} \cos \lambda = \psi(Q_{i,j})$$

или

$$\frac{\cos \mu}{h} u_{i+1, j} + \frac{\cos \lambda}{h} u_{i, j-1} - \frac{\cos \mu + \cos \lambda}{h} u_{i, j} = \psi(Q_{i, j}), \quad (2.55)$$

т. е. имеем уравнение вида (2.50), причем (i, j) — узел I рода.

Если все граничные узлы, для которых ближайшие точки границы принадлежат Γ_2 , обладают описанным свойством (острые углы между $l(Q)$ и лучами из узла), то для каждого такого узла может быть записано уравнение (2.55). Совокупность уравнений (2.11), (2.12), (2.55) однозначно разрешима, если имеется хотя бы один узел, для которого записано уравнение (2.12), или если среди внутренних узлов имеется хотя бы один узел II рода (что возможно, лишь если $g \neq 0$).

Укажем другую сеточную замену для $\frac{\partial u}{\partial l}$. Пусть луч, проходящий через граничный узел (i, j) в направлении $l(Q_{i, j})$, входит внутрь одного из квадратов сетки, имеющего вершиной узел (i, j) , и пересекает противоположную для узла (i, j) сторону квадрата в некоторой точке Q , лежащей между ближайшими к ней узлами (i', j') и (i'', j'') . Если $u(x, y)$ была бы линейной на отрезке между узлами (i', j') и (i'', j'') , то имели бы

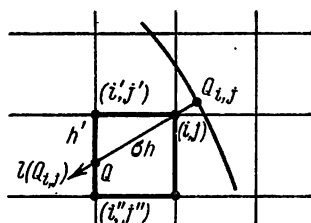


Рис. 10.

$$u(Q) = \left(1 - \frac{h'}{h}\right) u_{i', j'} + \frac{h'}{h} u_{i'', j''},$$

где h' — расстояние от Q до (i', j') (рис. 10).

Обозначая через σh ($1 \leq \sigma \leq \sqrt{2}$) расстояние от (i, j) до Q , будем считать выражение

$$\frac{\left(1 - \frac{h'}{h}\right) u_{i', j'} + \frac{h'}{h} u_{i'', j''} - u_{i, j}}{\sigma h} \quad (2.56)$$

сеточной заменой для $\frac{\partial u}{\partial l}$ [110]. Граничный узел, уравнение для которого получается заменой левой части уравнения (2.55) на выражение (2.56), будет также узлом I рода.

З а м е ч а н и е 1. Для эллиптического уравнения (2.8) способ замены производных конечно-разностными отношениями приводит к сеточной системе (2.11), аппроксимирующей уравнение (2.8) и образующей вместе с (2.12) или (2.13) однозначно разрешимую систему (как удовлетворяющую принципу максимума).

Если рассмотреть эллиптическое уравнение более общего вида

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2e \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} - gu = f, \quad (2.57)$$

$(e^2 < ab)$

то в случае $e \neq 0$ замена производных конечно-разностными отношениями приводит к системе, вообще говоря не удовлетворяющей принципу максимума. В статье [125] доказано, что для каждого эллиптического уравнения (2.57) (при некоторых общих предположениях о коэффициентах a, b, e) можно указать звезду (для квадратной сетки) и уравнение вида (2.50) (с коэффициентами, удовлетворяющими условию (2.51)), аппроксимирующее уравнение (2.57).

З а м е ч а н и е 2. Для уравнения (2.57) в случае выполнения условий:

$$\begin{aligned} \alpha) & |e(x, y)| < \min(a(x, y), b(x, y)), \\ \beta) & |c(x, y)| < M(a(x, y) - |e(x, y)|), \\ & |d(x, y)| < M(b(x, y) - |e(x, y)|), \\ \gamma) & g(x, y) \geq 0, \end{aligned}$$

можно указать сеточное уравнение, звезда которого является частью девятиточечной, удовлетворяющее условию (2.51) и порядок аппроксимации которого равен 2. Это уравнение таково:

$$\begin{aligned} (a)_0 \frac{u_1 - 2u_0 + u_3}{h^2} + (b)_0 \frac{u_2 - 2u_0 + u_4}{h^2} + \\ + 2(e)_0 \frac{u_5 + u_7 + 2u_0 - (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)}{2h^2} + \\ + (c)_0 \frac{u_1 - u_3}{2h} + (d)_0 \frac{u_2 - u_4}{2h} - (g)_0 u_0 = (f)_0, \end{aligned} \quad (2.58)$$

если $(e)_0 \geq 0$;

$$\begin{aligned} (a)_0 \frac{u_1 - 2u_0 + u_3}{h^2} + (b)_0 \frac{u_2 - 2u_0 + u_4}{h^2} + \\ + 2(e)_0 \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - (u_5 + u_6 + 2u_0)}{2h^2} + \\ + (c)_0 \frac{u_1 - u_3}{2h} + (d)_0 \frac{u_2 - u_4}{2h} - (g)_0 u_0 = (f)_0, \end{aligned} \quad (2.59)$$

если $(e)_0 < 0$.

Для $h < \frac{2}{M}$ в силу условий $\alpha), \beta), \gamma)$ коэффициенты при u_1, \dots, u_8 неотрицательны, а коэффициент при u_0 отрицателен и его модуль не меньше суммы всех других коэффициентов. В случае

$(e)_0 > 0$ звезда состоит из узлов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7; в случае $(e)_0 < 0$ — из узлов 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8; в случае $(e)_0 = 0$ — из узлов 0, 1, 2, 3, 4.

Б. Сеточный аналог самосопряженного эллиптического дифференциального уравнения. Известно ([63], см. также гл. III, § 3, п. 4 настоящей книги), что решение задачи Дирихле для самосопряженного дифференциального эллиптического уравнения

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - gu = f \quad (2.60)$$

$(a_{ij}(X))$ — коэффициенты положительно определенной квадратичной формы, $g(X) \geq 0$) доставляет минимум функционалу

$$F[u] \equiv \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + gu^2 + 2fu \right] d\Omega \quad (2.61)$$

в классе функций, обращающихся в заданную на Γ функцию $\varphi(X)$; наоборот, всякая функция $u(X)$, доставляющая функционалу (2.61) минимальное значение среди функций, обращающихся в φ на Γ , оказывается решением задачи Дирихле для уравнения (2.60). Этот факт может быть положен в основу вывода сеточных уравнений, заменяющих задачу Дирихле для уравнений (2.60). Для построения системы таких уравнений строят аналог функционала (2.61), заменяя $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ разностными отношениями и интеграл — интегральной суммой.

Этот сеточный аналог $F_h[u_h]$ является квадратичной функцией (сумма квадратичной и линейной форм) от значений u_h , квадратичная форма которой положительна.

Эта квадратичная функция ограничена снизу для сеточных функций, принимающих фиксированные заданные значения в некоторых узлах (например, в граничных узлах приписываются значения простым сносом). Тогда уравнения, которым удовлетворяют остальные значения сеточной функции, получаются приравниванием нулю производной от $F_h[u_h]$ по каждому $u_h(X_j)$, где X_j — узлы с незакрепленными значениями u_h . Так полученная система сеточных уравнений будет однозначно разрешимой.

Пример 14. Рассмотрим задачу

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(e \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right) - gu = f, \\ u|_{\Gamma} = \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

где функции $a(x, y)$, $b(x, y)$, $e(x, y)$ таковы, что $a > 0$, $b > 0$, $ab - e^2 > 0$. Для определенности в качестве сеточного аналога $F_h[u_h]$ возьмем

$$\begin{aligned} F_h[u_h] \equiv h^2 \sum_{(i, j) \in \Omega_h} \left\{ (a)_{i, j} \left(\frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{h} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2(e)_{i, j} \left(\frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{h} \frac{u_{i, j+1} - u_{i, j}}{h} \right) + (b)_{i, j} \left(\frac{u_{i, j+1} - u_{i, j}}{h} \right)^2 + \right. \\ \left. + (g)_{i, j} u_{i, j}^2 + 2(f)_{i, j} u_{i, j} \right\}, \quad (2.63) \end{aligned}$$

причем подразумевается, что заменены нулями конечно-разностные отношения $\frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{h}$ или $\frac{u_{i, j+1} - u_{i, j}}{h}$ для тех (i, j) , для которых узел $(i+1, j)$ или $(i, j+1)$ не принадлежит Ω_h . Все узлы Ω_h делим на внутренние и граничные в смысле пятиточечной звезды. Для граничных узлов записываем (2.12) (простой снос), а для каждого внутреннего узла (i, j) получаем уравнение вида

$$\begin{aligned} A_{i, j}^{(1)} u_{i+1, j} + A_{i, j}^{(2)} u_{i, j+1} + A_{i, j}^{(3)} u_{i-1, j} + A_{i, j}^{(4)} u_{i, j-1} + \\ + A_{i, j}^{(5)} u_{i-1, j+1} + A_{i, j}^{(6)} u_{i+1, j-1} - A_{i, j}^{(0)} u_{i, j} = (f)_{i, j}, \quad (2.64) \end{aligned}$$

где коэффициенты $A_{i, j}^{(k)}$ определяются формулами:

$$\begin{aligned} A_{i, j}^{(1)} &= \frac{(a)_{i, j} + (e)_{i, j}}{h^2}, & A_{i, j}^{(2)} &= \frac{(b)_{i, j} + (e)_{i, j}}{h^2}, \\ A_{i, j}^{(3)} &= \frac{(a)_{i-1, j} + (e)_{i-1, j}}{h^2}, & A_{i, j}^{(4)} &= \frac{(b)_{i, j-1} + (e)_{i, j-1}}{h^2}, \\ A_{i, j}^{(5)} &= -\frac{(e)_{i-1, j}}{h^2}, & A_{i, j}^{(6)} &= -\frac{(e)_{i, j-1}}{h^2}, \end{aligned}$$

$$A_{i, j}^{(0)} = \frac{1}{h^2} [(a)_{i, j} + (b)_{i, j} + 2(e)_{i, j} + (a)_{i-1, j} + (b)_{i, j-1}] + (g)_{i, j},$$

причем $A_{i, j}^{(5)}$ [$A_{i, j}^{(6)}$] заменяется нулем, если узел $(i-1, j+1)$ [$(i+1, j-1)$] не принадлежит Ω_h .

Система сеточных уравнений (2.64), (2.12) однозначно разрешима (если $ab - e^2 > 0$). Матрица этой системы симметрична и отрицательно определена.

Введем обозначения:

$$u_{hx} = \frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{h}, \quad u_{hx}^- = \frac{u_{i, j} - u_{i-1, j}}{h},$$

$$u_{hy} = \frac{u_{i, j+1} - u_{i, j}}{h}, \quad u_{hy}^- = \frac{u_{i, j} - u_{i, j-1}}{h}.$$

Тогда уравнение (2.64) примет вид

$$(au_{hx} + eu_{hy})_x + (eu_{hx} + bu_{hy})_y = f. \quad (2.65)$$

Уравнение (2.65) можно рассматривать как полученное из (2.62) заменой производных разностными отношениями.

Если $a \equiv b \equiv 1$, $e \equiv g \equiv 0$ (уравнение Пуассона), то (2.64) совпадает с (2.16).

Пример 15. Уравнения, близкие к самосопряженным. Общее эллиптическое уравнение вида

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2e \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c^* \frac{\partial u}{\partial x} + d^* \frac{\partial u}{\partial y} - gu = f$$

при достаточно гладких коэффициентах a , b , e можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(e \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + c \frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+ d \frac{\partial u}{\partial y} - gu = f, \quad (2.66)$$

где

$$c = c^* - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial e}{\partial y}, \quad d = d^* - \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}.$$

Предположим, что коэффициенты a , b , e удовлетворяют условию: существует такое положительное число $\alpha > 0$, что для всех $(x, y) \in \Omega$ наименьшее собственное значение матрицы $\begin{vmatrix} a & e \\ e & b \end{vmatrix}$ не меньше α (из этого предположения следует, что $a > 0$, $b > 0$, $ab - e^2 > 0$ для $(x, y) \in \Omega$). Будем

говорить, что уравнение (2.66) близко к самосопряженному, если для всякого положительного достаточно малого числа ε справедливо неравенство

$$g(x, y) - \frac{1}{4\alpha - \varepsilon} (c^2(x, y) + d^2(x, y)) \geq 0.$$

Пусть для уравнения (2.66) поставлена задача Дирихле. Для квадратной сетки Ω_h в граничных узлах (в смысле пяти-точечной звезды) запишем уравнение (2.12), а для каждого внутреннего узла (i, j) напишем уравнение, получающееся из (2.65) добавлением в левой части слагаемых

$$(c)_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + (d)_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h},$$

аппроксимирующих $c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y}$ (эти уравнения обозначим (2.65')). Если уравнение (2.66) близко к самосопряженному, то полученная сеточная система уравнений (2.12), (2.65') однозначно разрешима [35].

Пример 16. Умножением на $p(x) \equiv e^{\int_0^x c(\xi) d\xi}$ уравнение (2.31) приводится к так называемой самосопряженной форме:

$$\left. \begin{aligned} L_1 u &\equiv \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x) u = f_1(x) \\ (q(x) &= p(x) g(x), \quad f_1(x) = p(x) f(x)), \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

являющейся частным случаем уравнения (2.60) для $n=1$, если заменить a_{11} на $p(x)$, $g(x)$ на $q(x)$ и $f(x)$ на $f_1(x)$. При этом функционал (2.61) принимает вид

$$F_1[u] \equiv \int_0^1 [p(x) (u')^2 + q(x) u^2 + 2f_1(x) u] dx, \quad (2.68)$$

и остается напомнить об эквивалентности задачи на минимум функционала $F_1[u]$ и задачи (2.67), (2.32) (одномерной задачи Дирихле).

Для сетки $x_k = kh$ ($k = 0, 1, \dots, N; h = \frac{1}{N}$) введем сеточный аналог функционала (2.68) в виде

$$F_{1h}[u_h] \equiv h \sum_{k=0}^{N-1} \left[p \left(x_k + \frac{h}{2} \right) \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{h} \right)^2 + \right. \\ \left. + q(x_k) u_k^2 + 2f(x_k) u_k \right].$$

Как и в примере 14, придем к следующей системе $N-1$ линейных уравнений относительно u_1, \dots, u_{N-1} (обозначая $p \left(x_k + \frac{h}{2} \right) = p_{k+\frac{1}{2}}$, $p \left(x_k - \frac{h}{2} \right) = p_{k-\frac{1}{2}}$, $q(x_k) = q_k$, $f_1(x_k) = f_{1k}$):

$$\frac{p_{k+\frac{1}{2}} \frac{u_{k+1} - u_k}{h} - p_{k-\frac{1}{2}} \frac{u_k - u_{k-1}}{h}}{h} - q_k u_k = f_{1k} \quad (2.69) \\ (k = 1, 2, \dots, N-1; u_0 = \alpha, u_N = \beta).$$

Система (2.69) однозначно разрешима, а ее матрица симметрична и отрицательно определена. Сеточная система (2.69) удовлетворяет принципу максимума.

Пример 17. Пусть Ω_h — квадратная сетка в области Ω и Ω_h^0 — совокупность внутренних (в смысле пятиточечной звезды) узлов. Положим

$$E_h[u_h] \equiv h^2 \sum_{(i,j) \in \Omega_h^0} \left[\left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2} \right)^2 - \right. \\ \left. - 2(f)_{i,j} u_{i,j} \right].$$

Пусть известны значения u_h в узлах, не являющихся внутренними в смысле тринадцатиточечной звезды (см. п. 2, пример 7). Тогда $E_h[u_h]$ является квадратичной функцией (сумма квадратичной и линейных форм) от значений функции u_h во внутренних (в смысле тринадцатиточечной звезды) узлах, квадратичная форма которой положительна определена. $E_h[u_h]$ ограничена снизу и для некоторых значений u_h во внутренних узлах достигает минимума. Эти значения $u_{i,j}$, доставляющие минимум для E_h , удовлетворяют

уравнениям (см. (2.49))

$$(\Delta_h^2 u_h)_{i,j} \equiv \frac{1}{h^4} [20u_{i,j} - 8(u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}) + \\ + 2(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1}) + \\ + (u_{i+2,j} + u_{i,j+2} + u_{i-2,j} + u_{i,j-2})] = (f)_{i,j}, \quad (2.49)$$

число которых совпадает с числом внутренних узлов. Предполагается, что в этих уравнениях $u_{i+\xi, j+\eta}$ ($|\xi| + |\eta| \leq 2$) заменены их известными значениями, если узел $(i+\xi, j+\eta)$ не является внутренним. Полученная система уравнений однозначно разрешима [34].

Если ставится краевая задача для бигармонического уравнения Пуассона (2.48) и сеточные краевые условия составлены так, что позволяют указать значения $u_{i,j}$ в граничных узлах (для тринадцатиточечной звезды), то система (2.49), аппроксимирующая уравнение (2.48), однозначно разрешима.

б) Корректность сеточных уравнений. Пусть для приближенного решения задачи (2.1), (2.2) некоторый сеточный метод указывает совокупность сеток $\{\Omega_h\}_h$, $h \rightarrow 0$, и для каждой сетки Ω_h — уравнения (2.22), (2.23). Пусть в образовавшихся векторных пространствах введены нормы.

Определение. Сеточная задача (2.22), (2.23) называется корректной, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что для каждого допустимого h и любых двух сеточных функций u_h и \tilde{u}_h из выполнения неравенств

$$\|R_h u_h - R_h \tilde{u}_h\|_{F_h} \leq \delta, \quad (2.70)$$

$$\|r_{ih} u_h - r_{ih} \tilde{u}_h\|_{\Phi_{ih}} \leq \delta \quad (i=1, 2, \dots, s) \quad (2.71)$$

следует

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{U_h} \leq \varepsilon. \quad (2.72)$$

Замечание 1. Если сеточная задача корректна, то для каждого набора $(f_h, \Phi_{1h}, \dots, \Phi_{sh})$ может существовать не более одного решения $u_h \in U_h$ задачи (2.22), (2.23).

Замечание 2. Пусть R_h и r_{ih} — линейные операторы (этого естественно ожидать, если L и l_i — линейные операторы). Если сеточная задача (2.22), (2.23) однозначно разрешима для каждого допустимого h , то для каждого такого h существуют такие положительные числа N_h и N_{ih} , что для

любой сеточной функции u_h имеет место неравенство

$$\|u_h\|_{\dot{U}_h} \leq N_h \|R_h u_h\|_{F_h} + \sum_{i=1}^s N_{ih} \|r_{ih} u_h\|_{\Phi_{ih}}. \quad (2.73)$$

Для того чтобы сеточная задача была корректной, необходимо и достаточно, чтобы N_h и N_{ih} были ограниченными, т. е. необходимо и достаточно существование таких положительных чисел N и N_i (не зависящих от h), чтобы для любой сеточной функции имело место неравенство

$$\|u_h\|_{U_h} \leq N \|R_h u_h\|_{F_h} + \sum_{i=1}^s N_i \|r_{ih} u_h\|_{\Phi_{ih}}. \quad (2.74)$$

А. Корректность сеточных уравнений, удовлетворяющих принципу максимума. Пусть для каждого допустимого h совокупность N_h сеточных уравнений, удовлетворяющих принципу максимума, разбивается на $s+1$ групп соответственно по $N_h^0, N_h^1, \dots, N_h^s$ уравнений ($N_h^0 + N_h^1 + \dots + N_h^s = N_h$).

Совокупность левых частей i -й группы будем рассматривать как операторы R_h^i , переводящие N_h -мерные векторы в N_h^i -мерные векторы.

Отдельную произвольную составляющую вектора будем обозначать скобками [], помещая между скобками вектор. Под *нормой* будем понимать максимум модуля составляющих вектора.

Лемма 2. Если существует $s+1$ функций

$$v_0(X), v_1(X), \dots, v_s(X)$$

таких, что

$$[R_h^i v_j(X)] \leq \begin{cases} -1, & j=i, \\ 0, & j \neq i \end{cases} \quad (i, j=0, 1, \dots, s), \quad (2.75)$$

то для любой сеточной функции u_h имеет место неравенство

$$\|u_h\| \leq \sum_{i=0}^s N_i \|R_h^i u_h\|, \quad (2.76)$$

где

$$N_i = \max_{X \in \Omega} v_i(X).$$

Лемма 2 позволяет доказать корректность сеточных уравнений примеров 8—12. В каждом из этих примеров система разбивается на две группы уравнений: для внутренних узлов и для граничных узлов. Уравнение для каждого граничного узла X_j таково, что

$$A_j^{(0)} - \sum_{i=1}^{k_j} A_j^{(i)} = 1.$$

Поэтому $v_1(X) \equiv 1$ удовлетворяет условиям $(R_h v_1)_j = -1$ для каждого граничного узла X_j и $(R_h v_1)_j \leq 0$ для каждого внутреннего узла X_j . Пусть функция $v_0(X)$ положительна в Ω и такова, что для каждого допустимого h и каждого внутреннего узла X_j имеем $(R_h v_0)_j \leq -1$. Для граничного узла X_j имеем

$$\begin{aligned} (R_h v_0)_j &= \sum_{i=1}^{k_j} A_j^{(i)} v_0(X_{j(i)}) - A_j^{(0)} v_0(X_j) < \\ < \sum_{i=1}^{k_j} A_j^{(i)} v_0(X_{j(i)}) &\leq \max_{X \in \Omega} v_0(X) \sum_{i=1}^{k_j} A_j^{(i)} = \max_{X \in \Omega} v_0(X) (A_j^{(0)} - 1). \end{aligned}$$

Если граничное условие учитывается простым сносом, то $A_j^{(0)} = 1$ и поэтому имеем $(R_h v_0)_j < 0$, т. е. две функции $v_0(X)$ и $v_1(X) \equiv 1$ удовлетворяют всем условиям леммы 2 для $s = 1$.

Для сеточных граничных условий (2.13) имеем $A_j^{(0)} - 1 = \frac{\delta}{h} < 1$; нетрудно видеть, что функция $\tilde{v}_0(X) = v_0(X) + \max v_0(X)$ такова, что две функции $\tilde{v}_0(X)$ и $v_1(X) \equiv 1$ удовлетворяют условиям леммы 2 для $s = 1$. Аналогичное заключение верно и для уравнения (2.17).

Поэтому, если существует положительная в Ω функция $v_0(X)$ такая, что $(R_h v_0)_j \leq -1$ для всякого внутреннего узла, то для примеров 8—12 имеем на основании леммы 2

$$\|u_h\| \leq N \|R_h u_h\| + \|r_h u_h\|, \quad (2.77)$$

где

- а) $N = \max v_0(X)$ для граничного уравнения (2.12);
- б) $N = 2 \max v_0(X)$ для граничного уравнения (2.13) и (2.17).

Укажем несколько функций $v_0(X)$ для примеров 8—12.

1) Если $c = d \equiv 0$, то $v_0(X) = C - [A(x-x_0)^2 + B(y-y_0)^2]$, где A, B, C — положительные постоянные и (x_0, y_0) — произвольная точка.

Постоянные A и B легко выбрать так, чтобы $Lv_0 \leq -1$ для всех точек области Ω ; тогда будет выполнено и $[R_h v_0] \leq -1$, так как $R_h v_0 = \prod_h^0 (Lv_0)$ для v_0 . Постоянная C выбирается настолько большой, чтобы $v_0(X) \geq 0$ в Ω .

Например, если область Ω находится в эллипсе

$$\mu(x, y) \equiv 1 - \frac{(x-x_0)^2}{p^2} - \frac{(y-y_0)^2}{q^2} \geq 0,$$

то полагают

$$v_0(x, y) = C\mu(x, y),$$

где

$$C \geq \frac{1}{2 \min_{(x, y) \in \Omega} \left[\frac{a(x, y)}{p^2} + \frac{b(x, y)}{q^2} \right]}.$$

В частности, если $a = b \equiv 1$ (оператор Лапласа) и $p = q = r$, то

$$v_0(x, y) = \frac{1}{4} [r^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2].$$

2) Если $c^2 + d^2 \neq 0$, то предложены следующие два вида функций $v_0(x, y)$ [30], [83]:

а) Если область расположена в эллипсе $\mu(x, y) \geq 0$ и коэффициенты a, b, c, d таковы, что функция

$$\psi(x, y) \equiv \frac{a(x, y)}{p^2} + \frac{b(x, y)}{q^2} - \frac{|c(x, y)|}{p} - \frac{|d(x, y)|}{q}$$

имеет в Ω положительный минимум ψ_0 , то полагают [30]

$$v_0(x, y) = \frac{1}{2\psi_0} \mu(x, y).$$

б) Если $p = q = r$, $s = \min_{(x, y) \in \Omega} (a + b)$ ($s > 0$), то [83]

$$v_0(x, y) = \frac{3}{2As} (eAr^2 - eA[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]),$$

где $A = \frac{M^2 + 1}{4}$, $M > 0$ из условия (2.19).

Таким образом, сеточные уравнения примеров 8—12 корректны. Корректна также сеточная задача (2.33), (2.36).

Б. Корректность сеточных уравнений, близких к само-сопряженным. Обозначим через U_h^0 множество сеточных функций, определенных на квадратной сетке плоскости и

равных нулю в каждом узле, не являющемся внутренним узлом (в смысле пятиточечной звезды) для Ω_h . В U_h^0 введем норму

$$\|u_h\|_{U_h^0} \equiv \sqrt{h^2 \sum_{(i,j) \in \Omega_h} \left[(u_{i,j})^2 + \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \right)^2 + \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} \right)^2 \right]},$$

согласованную с функциональной нормой

$$\|u\|_{U_0} \equiv \sqrt{\int_{\Omega} [u^2 + |\text{grad } u|^2] d\Omega}$$

в классе U^0 функций $u(x, y)$, непрерывных в Ω вместе с производными первого порядка. Через F_h обозначим множество сеточных функций, определенных на множестве Ω_h^0 внутренних узлов; в F_h введем норму

$$\|f_h\|_{F_h} \equiv \sqrt{h^2 \sum_{(i,j) \in \Omega_h^0} (f_{i,j})^2},$$

согласованную с функциональной нормой

$$\|f\|_F \equiv \sqrt{\int_{\Omega} f^2 d\Omega}$$

в классе F функций $f(x, y)$, непрерывных в Ω . Обозначим через $(R_h u_h)_{i,j}$ левые части уравнений (2.65').

Имеет место утверждение: если уравнение (2.66) близко к самосопряженному, то существует такая положительная постоянная N (зависящая от α , ε и размеров области Ω), что для любого допустимого h и любой функции $u_h \in U_h^0$ верно (см. [35]) неравенство

$$\|u_h\|_{U_h^0} \leq N \|R_h u_h\|_{F_h}. \quad (2.78)$$

в) Теорема о сходимости и оценке погрешности [83]. Теорема 3. Пусть выполнены условия: α) задача (2.1), (2.2) имеет, и притом единственное, решение; β) уравнения (2.22), (2.23) аппроксимируют уравнения (2.1), (2.2); γ) сеточная задача (2.22), (2.23) имеет

решение $u_h \in U_h$ для каждого допустимого h ; δ) сеточная задача (2.22), (2.23) корректна.

Тогда при $h \rightarrow 0$ сеточное решение сходится к точному решению, т. е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u(X)\|_{U_h} = 0. \quad (2.79)$$

Добавление. Если к тому же операторы R_h и r_{ih} линейны, то имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|u_h - u(X)\|_{U_h} \leq N \|R_h u - \Pi_h^0(Lu, l_1 u, \dots, l_s u)\|_{F_h} + \\ + \sum_{i=1}^s N_i \|r_{ih} u - \Pi_h^i(Lu, l_1 u, \dots, l_s u)\|_{\Phi_{ih}}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

и если функции $\alpha(h)$ и $\alpha_i(h)$ оценивают аппроксимации (см. (2.27) и (2.28)), то

$$\|u_h - u(X)\|_{U_h} \leq MN\alpha(h) + \sum_{i=1}^s M_i N_i \alpha_i(h). \quad (2.81)$$

З а м е ч а н и е 1. Правые части неравенств (2.80) и (2.81) могут служить функциями $\omega(h)$ в неравенстве (2.7), т. е. в этом случае найдена оценка погрешности.

З а м е ч а н и е 2. Может случиться, что сеточная задача (2.22), (2.23) не является корректной, но числа N_h и N_{ih} из неравенства (2.73) и функции $\alpha(h)$ и $\alpha_i(h)$ таковы, что

$$\omega(h) \equiv MN_h \alpha(h) + \sum_{i=1}^s M_i N_{ih} \alpha_i(h) \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

В этом случае также имеет место сходимость сеточного решения к точному и найдена оценка погрешности.

Мы сейчас используем теорему 3 для получения оценок погрешности сеточного решения задачи Дирихле. Теорема 3 будет использована также и в других параграфах главы.

4. Сходимость и оценка погрешности для задачи Дирихле. а) Сеточные уравнения, удовлетворяющие принципу максимума. Задача Дирихле (2.8), (2.9) при довольно общих предположениях о гладкости контура, коэффициентов a, b, c, d, g и данных f и Φ имеет, и притом

единственное, непрерывное в замкнутой области $\Omega + \Gamma$ решение $u(x, y)$, некоторые производные которого могут оказаться неограниченными в окрестности Γ .

Если это решение $u(x, y)$ настолько гладко, что $u \in C^4$, то для сеточной задачи (2.11), (2.12) или (2.11), (2.13) имеют место оценки аппроксимации (2.29), (2.34), (2.35) и, следовательно, выполнены условия α) и β) теоремы 3 для $U = C^4$. Кроме того, эти сеточные задачи разрешимы и корректны, т. е. выполнены условия γ) и δ) теоремы 3. Поэтому в силу линейности операторов R_h и r_h в данном случае можно пользоваться оценкой (2.81). Приведем результаты, считая для простоты сетку квадратной.

1) Система (2.11), (2.12) (простой снос). Используя (2.29), (2.34), (2.81) (N , как в (2.77), $N_1 = 1$), получим

$$\|u_h - u\| \leq NMh^2 + M^{(1)}h = h(M^{(1)} + NMh) \leq Ch, \quad (2.82)$$

т. е. порядок приближения равен 1. Это — оценка Гершгорина [117].

Если все граничные узлы лежат на Γ , то правую часть в (2.34) можно заменить нулем и (2.82) заменяется на

$$\|u_h - u\| \leq NMh^2, \quad (2.83)$$

т. е. порядок приближения равен 2.

2) Система (2.11), (2.13) (учет граничных условий линейной интерполяцией). Используя (2.29), (2.35), (2.81), получим

$$\|u_h - u\| \leq NMh^2 + M^{(2)}h^2 = (M^{(2)} + NM)h^2 = Ch^2, \quad (2.84)$$

т. е. порядок приближения равен 2. Это — оценка Коллатца [30].

Из сравнения (2.82) и (2.84) следует, что при одной и той же достаточно мелкой сетке система (2.11), (2.13) дает более точное решение, чем (2.11), (2.12).

З а м е ч а н и е. Для сеточной системы, учитывающей граничное условие по Микеладзе (см. (2.17)), имеет место также оценка (2.84).

3) Пусть поставлена задача Дирихле для уравнения (2.8). Для ее решения можно воспользоваться шестиугольной и треугольной сетками, а также квадратной сеткой с уравнениями либо (2.46) (многоточечными), либо (2.47) (учет производных функций $f(x, y)$), учитывая граничные условия простым сносом.

Если для каждого допустимого h некоторые из граничных узлов не лежат на Γ , то в оценке $\|u_h - u\|$ имеется слагаемое $M^{(1)}h$ и порядок приближения не выше 1. Если область Ω и сетка Ω_h таковы, что для каждого допустимого h граничные узлы лежат на Γ , то можно надеяться на более высокий порядок приближения u_h к u . В последующем предполагается, что все граничные узлы лежат на Γ .

а) Пусть сетка шестиугольная (см. п. 2, пример 3, 2)). Если $u \in C^3$, то

$$\|u_h - u\| \leq 1,36 NM^{(3)}h.$$

б) Пусть сетка треугольная (см. п. 2, пример 3, 1)). Если $u \in C^4$, то (см. (2.40))

$$\|u_h - u\| \leq \frac{NM^{(4)}}{4} h^2,$$

т. е. порядок приближения равен 2.

Если пользоваться той же сеткой и вычислять правые части сеточных уравнений по формуле $\left(f + \frac{h^2}{16} \Delta f\right)_0$, то в предположении, что $u \in C^6$ (см. п. 2, замечание 2 к примеру 6), получим оценку

$$\|u_h - u\| \leq \frac{7NM^{(6)}}{270} h^4.$$

γ) Пусть сетка квадратная и область Ω такова, что все граничные узлы (в смысле девятиточной звезды рис. 4) лежат на Γ . Пусть $u \in C^6$. Если воспользоваться уравнением (2.46), то

$$\|u_h - u\| \leq \frac{NM^{(6)}}{45} h^4.$$

Если $u \in C^8$ и пользоваться сеточными уравнениями (2.47), то

$$\|u_h - u\| \leq \frac{520NM^{(8)}}{3 \cdot 8!} h^6.$$

Из приведенных примеров ясно, что пользоваться «высокоточными» уравнениями (2.46) и (2.47) имеет смысл только тогда, когда все граничные узлы лежат на Γ и есть уверенность в том, что $u \in C^6$ или $u \in C^8$ соответственно.

4) В 1) и 2) предполагалось, что $u(x, y) \in C^4$. Предположим теперь, что это не так, но $u \in C^2$. Тогда, используя (2.30) вместо (2.29) и (2.80) вместо (2.81), убедимся в том, что $\|u_h - u\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, т. е. имеет место равномерная сходимость сеточного решения к точному. Оценку погрешности в этом случае можно было бы выразить через модуль непрерывности вторых производных точного решения $u(x, y)$.

5) Если $u(x, y)$ не принадлежат C^2 , то нет уверенности в том, что $u_h \rightarrow u$ равномерно. Если для достаточно мелкой сетки уравнения (2.11) записывать только для тех внутренних узлов, которые от

границы Γ удалены не менее чем на некоторую величину ε , превышающую h , а в остальных узлах Ω_h решение u_h определять простым сносом, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ надлежащим образом (соотношение $\frac{h}{\varepsilon}$ зависит от поведения вторых производных в окрестности Γ)

$u_h \rightarrow u$ равномерно [77].

б) В работе [9] *внутренним узлом* квадратной сетки называется такой, расстояние которого от Γ не менее $2h$. В случае уравнения Лапласа ((2.14), $f \equiv 0$) для этих узлов записывается уравнение (2.16) ($f \equiv 0$), а для граничных узлов указаны новые способы записи граничных условий. В этой работе даны погрешности решения в предположениях $u(x, y) \in C^k$ ($k = 1, 2, 3$).

7) О погрешности $\|u - u_h\|$ (u — решение задачи (2.31), (2.32), u_h — решение сеточной системы (2.33), (2.36)) можно утверждать следующее:

$$\begin{cases} \|u - u_h\| \leq Ch^2, & \text{если } u \in C^4, \\ \|u - u_h\| \rightarrow 0, & \text{если } u \in C^2 \end{cases}$$

(предполагается, что $|c(x)| < M$, $g(x) \geq 0$).

б) Сеточные уравнения, близкие к самосопряженным. Как уже было указано (см. п. 3, пример 15), имеет место разрешимость сеточных уравнений (2.65'), если (2.66) близко к самосопряженному. Если $u_h \in U_h^0$ (см. п. 3, б), Б), то имеет место корректность системы (2.65') при условии $u_{i,j} = 0$ в граничных узлах (см. (2.78)). На основании теоремы 3 будет иметь место сходимость по норме U_h^0 сеточного решения к точному, если имеет место аппроксимация (по норме F_h (см. п. 3, б), Б) уравнения (2.66) уравнениями (2.65'). Можно доказать, что такая аппроксимация имеет место, например, для $u \in C^2$ (если коэффициенты a, b, e имеют ограниченные первые производные) и, следовательно, имеет место сходимость по норме U_h^0 сеточного решения к точному.

Ввиду громоздкости возможных здесь оценок ограничимся лишь сказанным выше.

в) Оценки погрешности через данные задачи. Оценки (2.82), (2.84) и им аналогичные обладают тем недостатком, что содержат в правой части величины $M^{(k)}$ — нормы производных порядка k точного решения, которые неизвестны, как и само точное решение. Это затруднение пытаются обходить следующими путями.

а) Для принятой сетки Ω_h решают сеточные уравнения и определяют u_h . Для найденной сеточной функции вычисляют

разностные отношения, аппроксимирующие те производные, для которых требуется определить максимум модуля. Максимум модуля разностных отношений порядка k и принимают за $M^{(k)}$. Этот путь всегда доступен, но малонадежен.

β) Из общих теоретических соображений иногда возможно оценить $M^{(k)}$ по данным задачи f и φ . Именно, для эллиптических уравнений имеются утверждения такого вида: если коэффициенты уравнения, контур Γ , данные f и φ достаточно гладкие, то решение задачи Дирихле принадлежит классу C^k и $M^{(k)}$ не превосходит некоторой функции величин, характеризующих гладкость коэффициентов, контура и данных. Полученные таким путем оценки $M^{(k)}$, как правило, сильно завышены. Этот путь теоретически безупречен, но малодоступен и навряд ли практически пригоден в силу упомянутой завышенности оценок для $M^{(k)}$.

γ) Пытались получить оценки погрешности непосредственно через данные задачи. Такие попытки оказались успешными в случае, когда область Ω есть прямоугольник, L —оператор Лапласа, сеточное уравнение имеет вид (2.16) ($f \equiv 0$). Приведем один результат такого рода [116].

Если Ω —квадрат $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, то

$$\|u_h - u\| \leq (1,4A_2 + 0,43A_3a)h^2, \quad (2.85)$$

где заданная на границе функция $\varphi(s)$ непрерывна на контуре, имеет непрерывные производные до третьего порядка на каждой стороне квадрата, A_2 —максимум $|\varphi''|$ в вершинах квадрата, A_3 —максимум $|\varphi''''|$ на сторонах квадрата.

Вообще говоря, при некотором выборе $\varphi(s)$ точное решение не будет принадлежать C^4 , и тогда нельзя ожидать оценки (2.83) (можно, по-видимому, рассчитывать на оценку типа $NM^{(3)}h$). Оценка (2.85) является лучшей по сравнению с той, которая следует из (2.81).

О других оценках типа (2.85) см. [116].

5. Итерационные способы решения сеточной задачи Дирихле. Число уравнений в системе (2.11), (2.12) или (2.11), (2.13) равно N_h —числу узлов в сетке Ω_h —и для квадратной сетки примерно равно $\frac{|\Omega|}{h^2}$, где $|\Omega|$ —площадь области Ω . Помимо того, что при $h \rightarrow 0$ число уравнений

в системе быстро увеличивается, мера обусловленности системы [90], [104] растет примерно так же, как и число уравнений в системе. Поэтому применение точных методов решения таких систем считается мало оправданным и предпочтение отдается итерационным методам.

а) Простая итерация сеточных систем, удовлетворяющих принципу максимума. Рассмотрим систему (2.50) в предположениях леммы 1. Если уравнение (2.50) для узла X_j решить относительно $u_h(X_j)$, то вместо системы (2.50) получим систему уравнений вида

$$u_h(X_j) = a_j^{(1)}u_h(X_{j(1)}) + \dots + a_j^{(k_j)}u_h(X_{j(k_j)}) + b_j \quad (2.86)$$

$(j = 1, 2, \dots, N_h),$

где

$$\alpha_j^{(i)} = \frac{A_j^{(i)}}{A_j^{(0)}} \quad (i = 1, 2, \dots, k_j), \quad b_j = -\frac{F_j}{A_j^{(0)}}.$$

Из неравенств (2.51), которым удовлетворяют $A_j^{(i)}$, следует, что

$$\alpha_j^{(i)} > 0, \quad \sum_{i=1}^{k_j} \alpha_j^{(i)} \leq 1, \quad (2.87)$$

причем хотя бы для одного индекса $j = j_0$ (узла II рода)

$$\sum_{i=1}^{k_{j_0}} \alpha_{j_0}^{(i)} < 1. \quad (2.88)$$

Если систему (2.86) записать в матричной форме

$$u_h = A_h u_h + b_h, \quad (2.89)$$

то из свойства (2.87) элементов матрицы A_h следует, что все ее характеристические числа по модулю не превосходят 1.

Тот факт, что из каждого узла I рода (см. п. 3, а) можно через соседние узлы добраться до узла II рода, обеспечивает следующее: модули всех характеристических чисел матрицы A_h меньше 1. Как известно [104], отсюда следует сходимость процесса итерации по формуле

$$u_h^{(m+1)} = A_h u_h^{(m)} + b_h, \quad (2.90)$$

где $u_h^{(m)}$ — m -я итерация, а $u_h^{(0)}$ — произвольная сеточная функция, выбранная в качестве начального приближения.

Процесс вычисления таков: выбирают произвольную сеточную функцию $u_h^{(0)}(X_j)$ и затем находят новые сеточные функции $u_h^{(1)}(X_j)$, $u_h^{(2)}(X_j)$, $u_h^{(3)}(X_j)$, ..., $u_h^{(m)}(X_j)$, пользуясь формулами

$$u_h^{(m+1)}(X_j) = a_j^{(1)} u_h^{(m)}(X_{j(1)}) + \dots + a_j^{(k_j)} u_h^{(m)}(X_{j(k_j)}) + b_j \quad (2.91) \\ (j=1, 2, \dots, N_h).$$

После нескольких циклов вычисления по формулам (2.91) процесс обрывается, и результат последнего цикла принимается за приближенное значение сеточной функции $u_h(X_j)$ ($j=1, 2, \dots, N_h$).

Пусть проделано k циклов ($k \geq 1$) и получено $u_h^{(k)}$. Далее будет указано, как по величине $\sigma^{(k)} = \|u_h^{(k)} - u_h^{(k-1)}\|$, которую легко найти почти без добавочных вычислений, можно судить о погрешности $\varepsilon^{(k)} = \|u_h^{(k)} - u_h\|$, где u_h — точное решение сеточной системы (2.86) или, что то же, (2.50).

З а м е ч а н и е 1. Для каждого узла X_j введем величину $\eta_j \equiv \sum_{i=1}^{k_j} a_j^{(i)}$. Тогда для всех узлов имеем $0 \leq \eta_j \leq 1$, а для узлов II

рода имеем $\eta_j < 1$. Пусть имеется l узлов II рода. Присвоим этим узлам номера от 1 до l так, чтобы $\eta_j \leq \eta_{j+1}$. Последующую нумерацию узлов I рода (если такие имеются) произведем так. Каждый последующий узел должен иметь соседом уже занумерованные узлы, и этот процесс нумерации продолжаем до исчерпания всех узлов сетки (этот процесс должен закончиться, так как любой узел I рода можно через соседей соединить с узлом II рода, который уже занумерован). При такой нумерации узлов процесс итерации Зейделя [104] для системы (2.86) будет сходящимся. По сравнению с формулами (2.91) различие в вычислениях заключается в том, что в правой части (2.91) $u_h^{(m)}(X_{j(i)})$ заменяется на $u_h^{(m+1)}(X_{j(i)})$, если $j(i) < j$.

З а м е ч а н и е 2. В п. 3 были приведены примеры 8—12 сеточных систем, аппроксимирующих задачу Дирихле для уравнения Лапласа (примеры 10, 11, 12) и для общего эллиптического уравнения (2.8) (примеры 8, 9). Эти сеточные системы удовлетворяют принципу максимума, и приближенные решения их могут быть найдены методом итерации. Если коэффициент $g(x, y)$ равен тождественно нулю, то все внутренние узлы суть узлы I рода и для того, чтобы итерация Зейделя была сходящейся, достаточно сначала перенумеровать граничные узлы (узлы II рода), а затем в порядке, указанном в замечании, перенумеровать все внутренние узлы.

Пример 18. Для приближенного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона привлечем квадратную сетку. Для внутренних узлов (в смысле пятиточечной звезды) запишем уравнение (2.16), а граничные условия учтем простым сносом. Тогда процесс итерации протекает следующим образом. Во внутренних узлах задают произвольно значение $u_h^{(0)}$ и затем вычисление производят по формуле

$$u_{i,j}^{(m+1)} = \frac{1}{4} \left(u_{i+1,j}^{(m)} + u_{i,j+1}^{(m)} + u_{i-1,j}^{(m)} + u_{i,j-1}^{(m)} \right) - \frac{h^2}{4} (f)_{i,j}. \quad (2.92)$$

В случае $f \equiv 0$ (уравнение Лапласа) вычисление последующих приближений по формуле (2.92) называется *методом Либмана* (или *методом средних арифметических*). Если вместо квадратной сетки пользоваться треугольной, то вместо (2.92) будем иметь

$$u_0^{(m+1)} = \frac{1}{6} \left(u_1^{(m)} + u_2^{(m)} + u_3^{(m)} + u_4^{(m)} + u_5^{(m)} + u_6^{(m)} \right) - \frac{h^2}{4} (f)_0,$$

где 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 — номера центра и узлов семиточечной звезды. Для шестиугольной сетки будем иметь

$$u_0^{(m+1)} = \frac{1}{3} \left(u_1^{(m)} + u_2^{(m)} + u_3^{(m)} \right) - \frac{h^2}{4} (f)_0.$$

З а м е ч а н и е 3. Для систем примеров 8–12 обозначим через A_0 максимальный из коэффициентов $A_j^{(0)}$ для внутренних узлов X_j . Для примеров 8 и 9 (система (2.11)) A_0 не превосходит $\frac{2 \max(a+b)}{h^2} + \max g$; для примера 11 $A_0 \leq \frac{4}{h^2} + \max g$ (для треугольной и шестиугольной сеток); для примера 12 $A_0 \leq \frac{10}{3h^2} + \max g$ (многоточечное уравнение). Если граничные условия учитываются простым сносом, то

$$e^{(k)} = \| u_h^{(k)} - u_h \| \leq N A_0 \sigma^{(k)} = N A_0 \| u_h^{(k)} - u_h^{(k-1)} \|, \quad (2.93)$$

где N — число из неравенства (2.77); если граничное условие учитывается линейной интерполяцией, то

$$e^{(k)} \leq \left(N A_0 + \frac{1}{2} \right) \sigma^{(k)}, \quad (2.94)$$

и, таким образом, можно судить о погрешности, которую допускают, принимая результат k -й итерации в качестве приближенного решения сеточной системы.

З а м е ч а н и е 4. Л. А. Люстерником [53] предложен метод ускорения процесса итерации по формуле (2.92), основанный на подавлении [104] некоторых компонент ошибки $u_h^{(m)} - u_h$ (компонент, отвечающих двум, отличающимся только знаком, наибольшим

по модулю собственным значениям сеточного оператора

$$S_h u_h \equiv \frac{1}{4} \left(u_{i+1, j} + u_{i, j+1} + u_{i-1, j} + u_{i, j-1} \right),$$

определенного на сеточных функциях, равных нулю в граничных узлах). Пусть получены итерации $u_h^{(m)}$, $u_h^{(m+2)}$, $u_h^{(m+4)}$. Тогда: а) по этим трем векторам вычисляется отношение

$$\left\{ \sum_{(i, j) \in \Omega_h^0} [u_{i, j}^{(m)} - u_{i, j}^{(m+4)}] \right\} : \left\{ \sum_{(i, j) \in \Omega_h^0} [u_{i, j}^{(m)} - u_{i, j}^{(m+2)}] \right\},$$

которое приравняется величине $1 + \lambda^2$, что позволяет найти λ^2 ; б) в качестве исправленного значения u_h следует принять

$$u_h \approx u_h^{(m)} - \frac{1}{1 - \lambda^2} \left(u_h^{(m)} - u_h^{(m+2)} \right).$$

Приводится пример [53], [75], где для $m=7$ указанный прием привел к значениям u_h , имеющим примерно характер двадцать шестой итерации; таким образом, этот прием позволил сэкономить 15 циклов итераций ($26 - (7 + 4) = 15$).

б) Подбор множителя. Пусть R_h означает квадратную матрицу порядка N_h , отвечающую сеточной системе (2.50), удовлетворяющей принципу максимума; систему (2.50) запишем в матричной форме:

$$R_h u_h = F_h. \quad (2.95)$$

Справедливо утверждение: вещественная часть каждого собственного числа матрицы R_h отрицательна. Отсюда следует, что существует такой положительный множитель $\alpha > 0$, для которого собственные числа матрицы $E + \alpha R_h$ (E — единичная матрица порядка N_h) будут по модулю меньше 1. Если такой множитель найден, то система

$$u_h = (E + \alpha R_h) u_h - \alpha F_h, \quad (2.96)$$

равносильная системе (2.95), такова, что процесс итерации

$$u_h^{(m+1)} = (E + \alpha R_h) u_h^{(m)} - \alpha F_h \quad (2.97)$$

сходится.

Поскольку все сеточные системы примеров 8—12 удовлетворяют принципу максимума, каждая из них может быть преобразована к виду (2.96) со сходящейся итерацией подбором положительного множителя α . Выбор такого множителя в общем случае системы (2.11), (2.12) или (2.11),

(2.13) является задачей трудной, и поэтому ограничимся случаем примеров 11, 12, а также системой (2.16), (2.12).

В этих примерах граничные условия учитывались простым сносом. В каждом уравнении, написанном для внутреннего узла, имеющего соседями граничные узлы, перенесем в правую часть слагаемые, отвечающие граничным узлам. Оставшаяся система уравнений также удовлетворяет принципу максимума (так как внутренние узлы, имеющие соседями граничные узлы, если они были узлами I рода в первоначальной системе, стали узлами II рода в преобразованной). Поэтому верно заключение об отрицательности вещественных частей характеристических чисел матрицы. Так как матрицы в этих примерах к тому же симметричны, то характеристические числа вещественны и, следовательно, отрицательны. Заметим, что то же можно сказать о матрице, отвечающей системе (2.64), являющейся сеточным аналогом самосопряженного эллиптического уравнения.

Запишем эту систему в виде

$$A_h u_h = F_h,$$

где матрица A_h симметричная отрицательно определенная. Для систем такого вида предложены [90], [116] процессы итерации вида

$$u_h^{(m+1)} = u_h^{(m)} + \alpha_m (A_h u_h^{(m)} - F_h),$$

где процесс итераций может быть значительно ускорен за счет выбора удачной последовательности $\{\alpha_m\}$. Различные методы (наискорейшего спуска; использующие полиномы Чебышева; релаксации верхней и нижней и др.) предлагают различные алгоритмы выбора последовательности $\{\alpha_m\}$ ([90], [104], [116]). В [90], [116] даны результаты испытаний этих методов для уравнения (2.16) в случае, когда Ω — прямоугольник.

Для решения сеточных систем можно воспользоваться также так называемым методом Монте-Карло; см. выпуск СМБ «Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)».

6. Численные примеры. Изложенное выше о сеточной задаче Дирихле заключим двумя примерами конкретного решения задач. При решении этих задач сетка выбиралась так, чтобы число неиз-

вестных в системе уравнений не превышало 20—100, хотя существующие быстродействующие машины позволяют в приемлемое время решать сеточные системы с гораздо большим числом неизвестных.

Пример 19. Пусть область Ω составлена из четырех квадратов со стороной 1, центры которых расположены в точках $(0, \frac{1}{2})$,

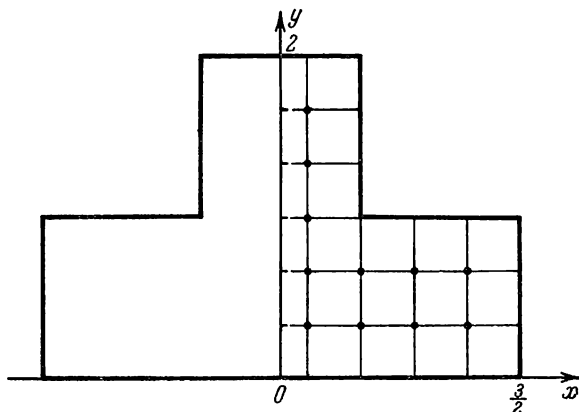


Рис. 11.

$(0, \frac{3}{2})$, $(-1, \frac{1}{2})$, $(1, \frac{1}{2})$ плоскости Oxy , а стороны параллельны координатным осям (рис. 11). Требуется найти решение $u(x, y)$ уравнения Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2,$$

обращающееся в нуль на контуре Γ области Ω :

$$u|_{\Gamma} = 0.$$

Заметим, что эта задача возникает при исследовании кручения цилиндрической балки, сечение которой совпадает с областью Ω .

Пусть l —некоторая прямая плоскости Oxy , P —любая точка плоскости, P' —точка, симметричная с P относительно l . Будем говорить, что функция $u(x, y)$ симметрична (антисимметрична) относительно l , если $u(P) = u(P')$ ($u(P) = -u(P')$) для произвольной точки P .

В силу симметрии области Ω и данных задачи относительно оси Oy нетрудно заключить, что точное решение $u(x, y)$ задачи симметрично относительно оси Oy . Поэтому достаточно определить $u(x, y)$ лишь в правой половине ($x \geq 0$) области Ω . Если выбрать квадратную сетку с шагом h , то область Ω разобьется примерно на

$\frac{4}{h^2}$ квадратиков и число неизвестных (с учетом симметрии) окажется около $\frac{2}{h^2}$. Для того чтобы вычисления не были очень громоздкими, потребуем, чтобы число неизвестных не превышало 20, т. е. чтобы $h^2 \geq \frac{1}{10}$. Поэтому выбираем $h = \frac{1}{3}$ и располагаем узлы (k, j) в точках (x_k, y_j) , где $x_k = \frac{k}{3} - \frac{1}{6}$, $y_j = \frac{j}{3}$. При этом все граничные узлы (в смысле пятиточечной звезды) окажутся на границе Γ , а внутри правой половины области Ω будет 11 узлов (см. рис. 11): (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2). Через $u_{k,j}$ и $u'_{k,j}$ обозначим значения искомой сеточной функции в узле (k, j) и симметричном для него относительно оси Oy . Используя простейшую пятиточечную замену оператора Лапласа, получим, например, для узла (1, 2)

$$\frac{u_{2,2} + u_{1,3} + u'_{1,2} + u_{1,1} - 4u_{1,2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -2$$

и, учитывая $u'_{1,2} = u_{1,2}$,

$$u_{1,2} = \frac{1}{3} (u_{1,1} + u_{1,3} + u_{2,2}) + \frac{2}{27}.$$

Аналогичные уравнения получим для узлов (1, 3) и (1, 4). При составлении уравнений для узлов, не лежащих на прямой $x = \frac{1}{6}$, учитывать симметрию решения не требуется. При составлении уравнений для всех узлов, кроме (1, 2), (1, 3), (1, 4), необходимо учитывать, что значения u в граничных узлах равны 0. Выпишем все 11 уравнений:

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= \frac{1}{3} (u_{1,2} + u_{2,1}) + \frac{2}{27}, & u_{1,2} &= \frac{1}{3} (u_{1,1} + u_{1,3} + u_{2,2}) + \frac{2}{27}, \\ u_{1,3} &= \frac{1}{3} (u_{1,2} + u_{1,4}) + \frac{2}{27}, & u_{1,4} &= \frac{1}{3} (u_{1,3} + u_{1,5}) + \frac{2}{27}, \\ u_{1,5} &= \frac{1}{3} u_{1,4} + \frac{2}{27}, & u_{2,1} &= \frac{1}{4} (u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,1}) + \frac{1}{18}, \\ u_{2,2} &= \frac{1}{4} (u_{1,2} + u_{2,1} + u_{3,2}) + \frac{1}{18}, & u_{3,1} &= \frac{1}{4} (u_{2,1} + u_{3,2} + u_{4,1}) + \frac{1}{18}, \\ u_{3,2} &= \frac{1}{4} (u_{2,2} + u_{3,1} + u_{4,2}) + \frac{1}{18}, & u_{4,1} &= \frac{1}{4} (u_{3,1} + u_{4,2}) + \frac{1}{18}, \\ & & u_{4,2} &= \frac{1}{4} (u_{3,2} + u_{4,1}) + \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

Решение этой системы дает грубое приближение к точному решению задачи. Выпишем его с четырьмя десятичными знаками:

$$\begin{array}{lll} u_{1,1} = 0,2602, & u_{1,2} = 0,3265, & u_{1,3} = 0,2513, \\ u_{1,4} = 0,2054, & u_{1,5} = 0,1425, & u_{2,1} = 0,2318, \\ u_{2,2} = 0,2456, & u_{2,3} = 0,1992, & u_{2,4} = 0,2021, \\ u_{4,1} = 0,1407, & u_{4,2} = 0,1412. & \end{array}$$

Допустим, что понадобилось получить сеточное решение для сетки с шагом вдвое меньше: $h = \frac{1}{6}$. Если узлы выбрать в точках $x_k = \frac{k}{6}$, $y_j = \frac{j}{6}$, то узлы новой сетки окажутся совпадающими с центрами квадратов, серединами сторон квадратов старой сетки и узлами старой сетки. Перенумеруем узлы так: узлам на линиях $x=0$, $x=\frac{1}{6}$, $x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{2}{3}$, $x=\frac{5}{6}$, $x=1$, $x=\frac{7}{6}$, $x=\frac{4}{3}$ присвоим соответственно номера 1—11, 12—22, 23—33, 34—38, 39—43, 44—48, 49—53, 54—58, 59—63, причем на каждой линии $x = \text{const}$ номера растут с ростом y . При составлении уравнений для узлов 1—11 следует учесть симметрию решения. Так, например, для узла 3 уравнение запишется так:

$$\frac{2u_{14} + u_2 + u_4 - 4u_3}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = -2 \quad \text{или} \quad u_3 = \frac{u_2 + u_4 + 2u_{14}}{4} + \frac{1}{72}.$$

Не будем выписывать всю систему 63 линейных уравнений. Она решалась методом простой итерации, причем при выборе начального приближения $u^{(0)}$ было использовано решение для старой сетки. Узлы 13, 15, 17, 19, 21, 35, 37, 45, 47, 55, 57 совпадают с узлами старой сетки, и значения $u^{(0)}$ в этих узлах примем равными найденным ранее. Нетрудно видеть, что для $u \in C^4$ имеет место неравенство (см. п. 2, пример 6)

$$\left| \frac{u(x+h, y+h) + u(x+h, y-h) + u(x-h, y+h)}{2h^2} + \frac{u(x-h, y-h) - 4u(x, y)}{2h^2} - \Delta u(x, y) \right| \leq \frac{2}{3} M^{(4)} h^2,$$

из которого следует, что значение $u(x, y)$ в центре девятиточечной звезды можно приближенно вычислять по формуле

$$u(x, y) \approx \frac{u(x+h, y+h) + u(x+h, y-h) + u(x-h, y+h)}{4} + \frac{u(x-h, y-h)}{4} - \frac{h^2}{2} (\Delta u)_{x, y}.$$

Полагая $h = \frac{1}{6}$, $(\Delta u)_{x, y} = -2$ и используя известные значения $u^{(0)}$ в узлах старой сетки, найдем $u^{(0)}$ в узлах, являющихся центрами

квадратов старой сетки, т. е. во всех остальных узлах с нечетными номерами. После этого, используя формулу (2.92), найдем значения $u^{(0)}$ в узлах с четными номерами. Полученная так сеточная функция $u^{(0)}$ служила начальным приближением для процесса простой итерации. Отметим, что понадобилось 80, 120, 160 итераций для того, чтобы $\|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|$ не превосходила 10^{-4} , 10^{-5} , 10^{-6} соответственно ($u^{(m)}$ — итерация с номером m , $\|u\|$ — максимум модуля). На основании формулы (2.93) гарантируется, что $\|u^{(m+1)} - u_h\|$ не превосходит 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} соответственно, где u_h — точное решение сеточной системы. Результаты с четырьмя цифрами после запятой приведены в таблице 16.

Таблица 16

Значения u_i

1	0,1616	14	0,3257	27	0,2644	40	0,2258	53	0,1172
2	0,2710	15	0,3403	28	0,1891	41	0,2586	54	0,0945
3	0,3324	16	0,3194	29	0,1571	42	0,2363	55	0,1467
4	0,3517	17	0,2792	30	0,1375	43	0,1527	56	0,1637
5	0,3382	18	0,2462	31	0,1195	44	0,1294	57	0,1473
6	0,3067	19	0,2180	32	0,0965	45	0,2068	58	0,0951
7	0,2747	20	0,1885	33	0,0610	46	0,2343	59	0,0602
8	0,2443	21	0,1499	34	0,1482	47	0,2111	60	0,0906
9	0,2110	22	0,0920	35	0,2423	48	0,1341	61	0,1002
10	0,1670	23	0,1551	36	0,2827	49	0,1154	62	0,0909
11	0,1017	24	0,2569	37	0,2670	50	0,1824	63	0,0604
12	0,1599	25	0,3074	38	0,1849	51	0,2050		
13	0,2673	26	0,3087	39	0,1397	52	0,1840		

Нами получены сеточные функции $u_{\frac{1}{3}}$ и $u_{\frac{1}{6}}$. Этим обстоятельством можно воспользоваться для построения сеточной функции $\tilde{u}_{\frac{1}{3}}$, более близкой к точному решению $u(x, y)$, чем $u_{\frac{1}{3}}$ и $u_{\frac{1}{6}}$. Для этого применяется способ Рунге, теоретические основы которого в случае метода сеток изложены в книге [83], а примеры применения — в книге [75]. В нашем случае способ Рунге сводится к следующему. Рассмотрим последовательность сеток, для которых $h = \frac{1}{N}$ (N — целое положительное число, $N \rightarrow \infty$) и все граничные (в смысле пятизвездной) узлы лежат на Γ . Доказывается, что сеточная функция $h^{-2}(u_h - u)$ при $h \rightarrow 0$ стремится к некоторой функции $v(x, y)$. Поэтому $u \approx u_h - h^2 v$ и, в частности,

$$u \approx u_{\frac{1}{3}} - \frac{1}{9} v, \quad u \approx u_{\frac{1}{6}} - \frac{1}{36} v.$$

Исключая v , найдем

$$u \approx \tilde{u}_{\frac{1}{3}} \equiv \frac{4u_{\frac{1}{6}} - u_{\frac{1}{3}}}{3}.$$

Функция $\tilde{u}_{\frac{1}{3}}$ определена лишь в узлах сетки $\Omega_{\frac{1}{3}}$. Приведем список значений функций $\tilde{u}_{\frac{1}{3}}$: 0,2697; 0,3449; 0,2885; 0,2222; 0,1523; 0,2458; 0,2742; 0,2094; 0,2140; 0,1487; 0,1493.

В силу гладкости данных задачи можно предполагать, что производные любого порядка точного решения являются непрерывными в $\bar{\Omega}$, т. е. $u \in C^k$ для любого k . Поскольку все граничные (в смысле девятиточечной звезды) узлы лежат на Γ , то имеет смысл составить сеточные уравнения (2.47) для девятиточечной звезды. Например, для узла 3, учитывая симметрию решения, получим

$$\frac{4(u_2 + u_4 + 2u_{14}) + (2u_{13} + 2u_{15}) - 20u_3}{6\left(\frac{1}{6}\right)^2} = -2,$$

или

$$u_3 = \frac{4(u_2 + u_4 + 2u_{14}) + 2(u_{13} + u_{15})}{20} + \frac{1}{60}.$$

Не будем выписывать всю систему 63 уравнений. Система решалась методом простой итерации, начальным приближением для которой служило полученное ранее решение $u_{\frac{1}{6}}$. Результаты с че-

тырьмя цифрами после запятой приведены в таблице 17.

Т а б л и ц а 17

Значения u_i

1	0,1621	14	0,3271	27	0,2664	40	0,2280	53	0,1183
2	0,2719	15	0,3421	28	0,1972	41	0,2617	54	0,0959
3	0,3337	16	0,3225	29	0,1594	42	0,2395	55	0,1487
4	0,3535	17	0,2856	30	0,1390	43	0,1544	56	0,1658
5	0,3417	18	0,2507	31	0,1209	44	0,1306	57	0,1492
6	0,3125	19	0,2211	32	0,0980	45	0,2090	58	0,0965
7	0,2797	20	0,1910	33	0,0626	46	0,2368	59	0,0617
8	0,2480	21	0,1521	34	0,1492	47	0,2132	60	0,0922
9	0,2138	22	0,0936	35	0,2444	48	0,1351	61	0,1016
10	0,1694	23	0,1559	36	0,2861	49	0,1168	62	0,0923
11	0,1032	24	0,2585	37	0,2721	50	0,1845	63	0,0619
12	0,1605	25	0,3096	38	0,1926	51	0,2073		
13	0,2683	26	0,3111	39	0,1409	52	0,1860		

Обозначим эту сеточную функцию через $\tilde{u}_{\frac{1}{6}}$. Ее значения в узлах сетки $\Omega_{\frac{1}{3}}$ мало отличаются от значений сеточной функции $\tilde{u}_{\frac{1}{3}}$. Это сравнение позволяет надеяться, что $\tilde{u}_{\frac{1}{6}}$ является приближением для $u(x, y)$ с тремя верными цифрами.

Пример 20. В области $\Omega (x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4)$ (рис. 12) найти решение дифференциального уравнения

$$(1+x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1-xy) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1+y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \\ = - [(x^2 + y^2 + xy) - 2(x^2 y^2) + \frac{3}{4}(x^2 + y^2)^2], \quad (2.98)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\left. \begin{aligned} u \Big|_{x=0} &= 1 - \frac{y^4}{16}, & u \Big|_{y=0} &= 1 - \frac{x^4}{16}, \\ u \Big|_{x^2+y^2=4} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.98')$$

Так как

$$(1+x^2)(1+y^2) - (1-xy)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2 > 0$$

для $x+y \neq 0$, то уравнение (2.98) является эллиптическим во всех точках области Ω , за исключением точки $(0, 0)$. Так как внутри области Ω выполняется условие $|1-xy| < \min((1+x^2), (1+y^2))$, то для приближенного решения задачи можно воспользоваться квадратной сеткой и уравнениями (2.58), (2.59). В этом случае получится система, удовлетворяющая принципу максимума (при удачном выборе уравнений для граничных узлов).

Решение $u(x, y)$ задачи (2.98), (2.98') является функцией, симметричной относительно прямой $x=y$. Это следует из того, что при замене x на y и y на x задача переходит сама в себя, и задача имеет только одно решение. Итак, достаточно разыскать решение в

области $\bar{\Omega}_1 (0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq 4)$. Мы выбираем $h = \frac{1}{4}$, $x_k = \frac{k}{4}$, $y_j = \frac{j}{4}$. Тогда внутри области Ω_1 и на границе $y=x$ размещаются 23 узла, которые будем считать занумерованными в порядке их

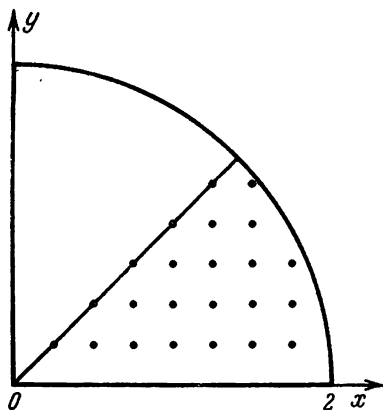


Рис. 12.

следования в следующем списке: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(1, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $\left(1, \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $(1, 1)$, $\left(\frac{5}{4}, 1\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$. На границе $y=0$ лежат 9 узлов, и значения искомой функции в этих узлах известны. Узлы 7, 13, 18, 21, 23 являются граничными относительно пятиточечной звезды и тем более относительно девятиточечной. В этих узлах граничные условия учтем линейной интерполяцией (в направлении оси Ox). Например, для узла 18 имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta+h} &= \frac{\sqrt{4-\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{7}{4}}}{\left(\sqrt{4-\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}}\right)+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{55}-7}{\sqrt{55}-6} = \\ &= \frac{(\sqrt{55}-7)(\sqrt{55}+6)}{55-36} = \frac{13-\sqrt{55}}{19} = 0,2938843, \end{aligned}$$

и поэтому уравнение примет вид

$$u_{18} - 0,2938843u_{17} = 0.$$

В узлах 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 19 имеем $1-xy \geq 0$. Для этих узлов записываются уравнения типа (2.58). Например, для узла 14 уравнение примет вид (с учетом симметрии искомой функции)

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{9}{16}\right) \frac{u_{15} + u_9 - 2u_{14}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) \frac{u_{19} + u_8 + 2u_{14} - (2u_{15} + 2u_9)}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \\ + \left(1 + \frac{9}{16}\right) \frac{u_9 + u_{15} - 2u_{14}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \\ = - \left[\left(\frac{9}{16} + \frac{9}{16} + \frac{9}{16}\right) - 2 \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{9}{16} + \frac{3}{4} \left(\frac{9}{16} + \frac{9}{16}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

или, после упрощений,

$$7u_8 + 36u_9 - 86u_{14} + 36u_{15} + 7u_{19} = -2,003906.$$

Для узлов 17, 20, 22 имеем $1-xy < 0$. Для этих узлов записываются уравнения типа (2.59). Например, для узла 20 уравнение

примет вид

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{25}{16}\right) \frac{u_{21} + u_{19} - 2u_{20}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \\ & + \left(1 - \frac{5}{4} \cdot 1\right) \frac{u_{21} + u_{19} + u_{16} + u_{22} - (u_{20} + u_{17} + 2u_{20})}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \\ & + (1 + 1^2) \frac{u_{16} + u_{22} - 2u_{20}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \\ & = - \left[\left(\frac{25}{16} + 1 + \frac{5}{4} \cdot 1 \right) - 2 \cdot \frac{25}{16} \cdot 1 + \frac{3}{4} \left(\frac{25}{16} + 1 \right)^2 \right] \end{aligned}$$

или, после упрощений,

$$28u_{16} + 4u_{17} + 37u_{19} - 134u_{20} + 37u_{21} + 28u_{22} = -5,612305.$$

Остальные уравнения системы выписывать не будем. В таблице 18 приведены (с сохранением трех цифр после запятой): в столбце u_h — решения сеточной системы, в столбце u — значения точного решения $u(x, y) = 1 - \frac{(x^2 + y^2)^2}{16}$ в узлах сетки.

Таблица 18

Значения u_h — решения сеточной системы и u — значения точного решения

	u_h	u		u_h	u		u_h	u
1	0,986	0,999	9	0,926	0,959	17	0,446	0,506
2	0,977	0,994	10	0,862	0,902	18	0,131	0,179
3	0,955	0,976	11	0,745	0,795	19	0,694	0,750
4	0,902	0,929	12	0,547	0,609	20	0,526	0,590
5	0,797	0,835	13	0,234	0,314	21	0,253	0,340
6	0,607	0,666	14	0,880	0,921	22	0,340	0,390
7	0,294	0,390	15	0,799	0,847	23	0,067	0,092
8	0,958	0,984	16	0,662	0,718			

Из сопоставления u_h и u следует, что u_h является весьма грубым приближением к u . Для достижения большей точности следует брать сетку помельче.

7. Сеточная задача Неймана. Для упрощения изложения мы рассмотрим задачу Неймана в наиболее простой

постановке: в конечной области Ω плоскости Oxy найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую в Ω уравнению Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (2.14)$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (2.99)$$

где $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ — производная функции $u(x, y)$ в направлении внутренней нормали к контуру Γ , $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ — заданные соответственно в Ω и на Γ функции.

Особенности этой задачи заключаются в следующем: а) не при всяком выборе $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ существует решение задачи; б) если для заданных f и φ существует хотя бы одно решение $u(x, y)$, то $u(x, y) + C$, где C — произвольная постоянная, также является решением (и всякие два решения отличаются постоянным слагаемым).

Известно [94], что для существования решения задачи (2.14), (2.99) необходимо и достаточно, чтобы (в предположении достаточной гладкости f , φ и контура Γ)

$$\int_{\Omega} f d\Omega + \int_{\Gamma} \varphi d\Gamma = 0. \quad (2.100)$$

Из условий (2.100) следует, что задача весьма чувствительна к малым изменениям f и φ : достаточно сколь угодно малых изменений f и φ , чтобы соотношение (2.100) нарушилось и у измененной задачи не было бы решений. Аналогичное обстоятельство будет иметь место и для сеточных уравнений, на совместность которых приходится обращать особое внимание.

Если выполнено равенство (2.100), то решения существуют и среди них можно выбрать одно, удовлетворяющее какому-либо дополнительному условию, например

$$\int_{\Omega} u(x, y) d\Omega = 0 \quad (2.101)$$

или

$$u(x_0, y_0) = 0, \quad (2.102)$$

где (x_0, y_0) — некоторая точка области Ω .

Рассмотрим два подхода к составлению сеточных уравнений, заменяющих задачу (2.14), (2.99).

а) Замена производных конечно-разностными отношениями. Пусть Ω_h — квадратная сетка. Множество внутренних узлов (в смысле пятиточечной звезды) обозначим через Ω_h^0 , множество граничных — через Ω_h^1 . Каждому $(i, j) \in \Omega_h^0$ ставится в соответствие уравнение

$$\begin{aligned} (\Delta_h u_h)_{i,j} &\equiv \frac{u_{j+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2} = \\ &= (\Pi_h^0(f, \varphi))_{i,j}, \quad (i, j) \in \Omega_h^0. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Каждому $(i, j) \in \Omega_h^1$ ставится в соответствие уравнение вида (см. п. 3, пример 13)

$$\begin{aligned} (r_h u_h)_{i,j} &\equiv \frac{u_{i+\xi, j} - u_{i,j}}{h} \cos \mu + \frac{u_{i, j+\eta} - u_{i,j}}{h} \cos \lambda = \\ &= (\Pi_h^{(1)}(f, \varphi))_{i,j}, \quad (i, j) \in \Omega_h^1, \end{aligned} \quad (2.104)$$

где $\xi, \eta = \pm 1$ и узлы $(i + \xi, j)$ и $(i, j + \eta)$ принадлежат Ω_h , а μ и λ — углы, образуемые внутренней нормалью к Γ в точке $Q_{i,j} \in \Gamma$, ближайшей к (i, j) (и, следовательно, проходящей через (i, j)), с лучами из (i, j) к $(i + \xi, j)$, $(i, j + \eta)$ соответственно; предполагается, что $0 \leq \mu \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$ (см. п. 3, пример 6).

В этих предположениях система (2.103), (2.104) такова, что все узлы $(i, j) \in \Omega_h$ являются узлами I рода и соответствующая однородная система имеет ненулевое решение $u_{i,j} \equiv 1$, $(i, j) \in \Omega_h$. Таким образом, определитель этой системы равен нулю и ранг матрицы коэффициентов равен $N_h - 1$. Последнее следует из того, что если одно из уравнений системы, соответствующее узлу (i_0, j_0) , заменить уравнением $u_{i_0, j_0} = 0$, то узел (i_0, j_0) станет узлом II рода. Новая система в силу теоремы 2 будет иметь единственное решение, что и доказывает утверждение о ранге матрицы. Поэтому существует единственная (с точностью до множителя) система N_h коэффициентов таких, что линейная комбинация левых частей (2.103), (2.104) тождественно равна нулю. Эти множители обозначим через $h^2 \gamma_{i,j}$ для $(i, j) \in \Omega_h^0$, $h \delta_{i,j}$ для $(i, j) \in \Omega_h^1$.

Тогда система (2.103), (2.104) является совместной в том и только том случае, если

$$h^2 \sum_{(i, j) \in \Omega_h^0} \gamma_{i, j} (\Pi_h^0(f, \varphi))_{i, j} + h \sum_{(i, j) \in \Omega_h^1} \delta_{i, j} (\Pi_h^1(f, \varphi))_{i, j} = 0. \quad (2.105)$$

Уравнение (2.105) назовем *сеточным аналогом* уравнения (2.100). Для произвольной области Ω и выбранного шага h для определения чисел $\gamma_{i, j}$ и $\delta_{i, j}$ требуется решать систему $N_h - 1$ линейных уравнений, что является само по себе трудной задачей. Для областей, контур которых состоит из отрезков прямых, параллельных координатным осям (прямоугольник или фигура, составленная из прямоугольников), все $\gamma_{i, j}$ и $\delta_{i, j}$ равны между собой и можно положить $\gamma_{i, j} = \delta_{i, j} = 1$. В этом случае уравнение (2.105) принимает вид

$$h^2 \sum_{(i, j) \in \Omega_h^0} (\Pi_h^0(f, \varphi))_{i, j} + h \sum_{(i, j) \in \Omega_h^1} (\Pi_h^1(f, \varphi))_{i, j} = 0. \quad (2.106)$$

З а м е ч а н и е. Во второй сумме должны опускаться слагаемые, отвечающие вершинам с внутренним углом $\frac{\pi}{2}$.

Если выполнено (2.100), то область Ω и контур Γ можно разбить на неперекрывающиеся части, являющиеся окрестностями соответственно внутренних и граничных узлов. Тогда можно положить

$$(\Pi_h^0)_{i, j} = \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_{i, j}} f(x, y) d\Omega, \quad (2.107)$$

$$(\Pi_h^1)_{i, j} = \frac{1}{h} \int_{\Gamma_{i, j}} \varphi d\Gamma, \quad (2.108)$$

где $\Omega_{i, j}$ и $\Gamma_{i, j}$ — выбранные окрестности соответственно для $(i, j) \in \Omega_h^0$ и $(i, j) \in \Omega_h^1$. При таком выборе в силу (2.100) выполняется (2.106) и система (2.103), (2.104) совместна.

Для того чтобы задача имела единственное решение, достаточно задать сеточный аналог либо условия (2.101), либо (2.102). Таковыми, например, являются

$$h^2 \sum_{(i, j) \in \Omega_h} u_{i, j} = 0 \quad (2.109)$$

и

$$u_{i_0, j_0} = 0, \quad (2.110)$$

где (i_0, j_0) — какой-либо узел, наиболее близкий к точке (x_0, y_0) .

Пример 21. Пусть Ω — прямоугольник со сторонами a и b , параллельными координатным осям, где a и b — соизмеримые числа, и h выбрано так, что $a = Mh$ и $b = Nh$, где M и N — целые числа. Пусть $f \equiv 0$. Положим

$$\begin{aligned} (\Pi_h^0)_{i, j} &= 0, \quad (i, j) \in \Omega_h^0, \\ (\Pi_h^1(\Phi))_{i, j} &= (\Phi)_{i, j} - \frac{1}{2(M+N-2)} \sum \Phi_{i', j'}, \end{aligned}$$

где сумма берется по всем граничным узлам, кроме вершин прямоугольника. Тогда выполнено (2.106) и система (2.103), (2.104) совместна.

Для прямоугольника $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ гармонический многочлен

$$U^*(x, y) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$$

имеет на контуре внутренние нормальные производные, равные $+1$ на горизонтальных сторонах и -1 на вертикальных. Нетрудно убедиться, что решением сеточной задачи для этих данных является многочлен

$$u_h(x, y) = (1-h)^{-1} U^*(x, y),$$

и, следовательно, погрешность сеточного решения задачи Неймана (полученного указанным в этом примере способом) убывает не быстрее чем h [118].

Пример 22. В работе [118] предлагается следующий способ составления сеточных уравнений (уравнение Лапласа, область — прямоугольник). Кроме основных узлов (i, j) , $(0 \leq i \leq M, 0 \leq j \leq N)$, лежащих внутри или на границе прямоугольника, вводятся вспомогательные узлы $(-1, j)$, $(M+1, j)$, $(i, -1)$, $(i, N+1)$. Для каждого из основных узлов (i, j) записывается сеточное уравнение (2.103) $((\Pi_h^0)_{i, j} = 0)$; для узла $(0, j)$, лежащего на одной из сторон прямоугольника, уравнение (2.99) заменяется таким:

$$\frac{u_{1, j} - u_{-1, j}}{2h} = (\Phi)_{0, j} - \frac{1}{2(M+N)} \sum \Phi_{i', j'}$$

где суммирование ведется по всем узлам контура, включая и вершины прямоугольника. Аналогично записываются граничные условия для узлов на других сторонах контура.

Так полученная система совместна. Если функция φ непрерывна и достаточно гладка на каждой стороне прямоугольника, то погрешность сеточного решения оценивается функцией $Ah^2 \ln h$ (в предположении, что как точное, так и сеточное решения в одной из вершин прямоугольника обращаются в нуль).

Гармонический многочлен

$$U^*(x, y) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

имеет на контуре квадрата $0 \leq x, y \leq 1$ такую нормальную производную φ_n для которой решение сеточной задачи указанным в этом примере способом приводит к функции

$$u_h = U^*(x, y) - h^2 x.$$

Следовательно, погрешность сеточного решения u_h , полученного описанным здесь способом, убывает, вообще говоря, не быстрее h^2 .

З а м е ч а н и е 1. Уже было отмечено, что система, полученная из (2.103), (2.104) заменой уравнения для некоторого узла (i_0, j_0) уравнением $u_{i_0, j_0} = 0$, однозначно разрешима. Пусть точка $Q(x_0, y_0)$ является узлом для каждой сетки последовательности $\{\Omega_h\}$ ($h \rightarrow 0$). Составляя систему (2.103), (2.104) для всех других узлов сетки Ω_h и полагая $u_h(Q) = 0$, получим для каждой сетки однозначно разрешимую систему уравнений.

Пусть $\{u_h\}$ — последовательность решений так полученных систем. Можно надеяться, что u_h стремится к точному решению задачи (2.14), (2.99), (2.102). В статье [10] это доказано для случая, когда область Ω звездна, граница Γ достаточно гладкая, а уравнение (2.104) заменено более точным сеточным уравнением; в этой же статье получена оценка погрешности.

З а м е ч а н и е 2. В статье [110] рассмотрено сеточное решение более общей задачи: найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую в Ω уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} - gu = f \quad (2.111)$$

и на Γ граничному условию

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - \kappa u\right)_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (2.112)$$

где κ — определенная на Γ функция. Пусть $g \geq 0$ и $\kappa \geq 0$ и либо $g \neq 0$, либо $\kappa \neq 0$. Тогда задача (2.111), (2.112) не может иметь более одного решения. В статье [110] уравнение (2.112) заменялось сеточным уравнением вида (см. п. 3, (2.56))

$$\frac{\left(1 - \frac{h'}{h}\right) u_{i', j'} + \frac{h'}{h} u_{i'', j''} - u_{i, j}}{\sigma h} - \kappa(Q_i, j) u_{i, j} = \varphi(Q_i, j),$$

а уравнение (2.111)—уравнением (2.11) ($a \equiv b \equiv 1$). В силу $g \neq 0$ либо $\kappa \neq 0$ ($g \geq 0, \kappa \geq 0$) для достаточно малых h система сеточных уравнений содержит узлы II рода и удовлетворяет принципу максимума, а также корректна. Имеет место сходимость сеточного решения к точному решению задачи (2.111), (2.112).

З а м е ч а н и е 3. Одномерным аналогом задачи (2.111), (2.112) является такая: найти решение уравнения (2.31), удовлетворяющее граничным условиям

$$\left(\frac{du}{dx} - \kappa_0 u\right)_{x=0} = \alpha, \quad \left(-\frac{du}{dx} - \kappa_1 u\right)_{x=1} = \beta$$

$$(\kappa_0, \kappa_1 \geq 0).$$

Если сеточные аналоги последних уравнений для сетки $x_k = kh$ ($h = \frac{1}{N}$) выбрать так:

$$\frac{u_1 - u_0}{h} - \kappa_0 u_0 = \alpha, \quad -\frac{u_N - u_{N-1}}{h} - \kappa_1 u_N = \beta,$$

то эти уравнения вместе с (2.33) образуют систему, удовлетворяющую принципу максимума (предполагается: либо $g \neq 0$ при $\kappa_0^2 + \kappa_1^2 = 0$, либо $\kappa_0^2 + \kappa_1^2 > 0$). Другая сеточная замена граничных условий (см. [25]) приводит к сеточной системе, несложно преобразующейся к удовлетворяющей принципу максимума. В обоих случаях имеет место корректность сеточных задач и сходимость сеточных решений к точному.

б) Сеточный аналог вариационной задачи. Известно ([33], [63], а также гл. III, § 3, п. 4 настоящей книги), что решение задачи (2.14), (2.99) доставляет минимум функционалу

$$F[u] \equiv \int_{\Omega} [|\text{grad } u|^2 + 2fu] d\Omega + 2 \int_{\Gamma} u\varphi d\Gamma$$

в классе достаточно гладких функций $u(x, y)$.

Для построения сеточных уравнений следует построить сеточные аналоги для

$$\int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 d\Omega, \quad \int_{\Omega} fu d\Omega, \quad \int_{\Gamma} \varphi u d\Gamma.$$

Сначала рассмотрим сеточные аналоги для $\int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 d\Omega$.

а) Пусть $(i, j) \in \Omega_h$. Если узлы $(i+1, j)$ и $(i, j+1)$ оба принадлежат Ω_h , то сеточным аналогом $|\text{grad } u|^2$

в узле (i, j) считают

$$|\text{grad}_h u_{i,j}|^2 \equiv \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \right)^2 + \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} \right)^2;$$

если узел $(i+1, j)$ $[(i, j+1)]$ не принадлежит Ω_h , то соответствующее слагаемое в правой части опускается. Тогда сеточным аналогом $\int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 d\Omega$ считают

$$h^2 \sum_{(i,j) \in \Omega_h} |\text{grad}_h u_{i,j}|^2 \equiv \sum_I (u_{i,j} - u_{i',j'})^2,$$

где сумма в правой части распространена на все пары соседних узлов (i, j) и (i', j') из Ω_h .

б) В последней сумме опускают слагаемые, отвечающие таким парам соседних узлов (i, j) и (i', j') , когда оба эти узла являются граничными (в смысле пятиточечной звезды). Эту сумму обозначим

$$\sum_{\Pi} (u_{i,j} - u_{i',j'})^2.$$

Если под знаком суммы не будет стоять индекс I или II, то будем подразумевать любой из них.

Сеточные аналоги интегралов $\int_{\Omega} fu d\Omega$, $\int_{\Gamma} \varphi u d\Gamma$ запишем в виде

$$h^2 \sum_{(i,j) \in \Omega_h} u_{i,j} (\tilde{\Pi}_h^0(f))_{i,j} \text{ и } h \sum_{(i,j) \in \Omega_h^1} u_{i,j} (\tilde{\Pi}_h^1(\varphi))_{i,j},$$

где $(\tilde{\Pi}_h^0(f))_{i,j}$ и $(\tilde{\Pi}_h^1(\varphi))_{i,j}$ — некоторые линейные функционалы от f и φ , зависящие от значений f и φ лишь в некоторой окрестности узла (i, j) ; эти функционалы должны быть выбраны так, чтобы указанные выше суммы было разумно считать приближенными значениями интегралов $\int_{\Omega} fu d\Omega$

и $\int_{\Gamma} \varphi u d\Gamma$. Тогда сеточный аналог функционала $F[u]$ примет вид

$$F_h[u_h] \equiv \sum (u_{i,j} - u_{i',j'})^2 + 2h^2 \sum_{(i,j) \in \Omega_h} u_{i,j} (\tilde{\Pi}_h^0(f))_{i,j} + 2h \sum_{(i,j) \in \Omega_h^1} u_{i,j} (\tilde{\Pi}_h^1(\varphi))_{i,j} \quad (2.113)$$

Этот функционал ограничен снизу для $\{u_{i,j}\}$, удовлетворяющих либо условию (2.109), либо (2.110). Для определенности выберем условие (2.109).

Для получения сеточных уравнений надо приравнять нулю производные по каждому $u_{i,j}$ от суммы

$$F_h[u_h] + 2\alpha_h h^2 \sum u_{i,j},$$

где $2\alpha_h$ — множитель Лагранжа. Если (i,j) — внутренний узел, то указанный прием приводит к уравнению (после деления на $2h^2$)

$$\begin{aligned} (\Delta_h u_h)_{i,j} &\equiv \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2} \\ &= (\tilde{\Pi}_h^0(f))_{i,j} + \alpha_h. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Если (i,j) — граничный узел, то указанный прием приводит к уравнению (после деления на $2h$)

$$\begin{aligned} (r_h u_h)_{i,j} &\equiv \frac{1}{h} [\eta_{i,j}^1 u_{i+1,j} + \eta_{i,j}^2 u_{i,j+1} + \eta_{i,j}^3 u_{i-1,j} + \\ &+ \eta_{i,j}^4 u_{i,j-1} - (\eta_{i,j}^1 + \eta_{i,j}^2 + \eta_{i,j}^3 + \eta_{i,j}^4) u_{i,j}] = \\ &= (\tilde{\Pi}_h^1(\varphi))_{i,j} + h((\tilde{\Pi}_h^0(f))_{i,j} + \alpha_h). \end{aligned} \quad (2.115)$$

Здесь $\eta_{i,j}^k$ ($k=1, 2, 3, 4$) определяются различно в зависимости от того, какая из сумм \sum_{Γ} или \prod_{Π} подразумевается в (2.113); именно $\eta_{i,j}^k$ равен 1 для \sum_{Γ} , если k -й узел звезды с центром в (i,j) принадлежит Ω_{h_j} и равен нулю в противном случае; $\eta_{i,j}^k$ равен 1 для \prod_{Π} , если k -й узел звезды с центром в (i,j) является внутренним узлом Ω_h , и нулю в противном случае.

Так как сумма производных от $\sum (u_{i,j} - u_{i',j'})^2$ по каждому из $u_{i,j}$ тождественно равна нулю, то

$$h^2 \sum (\Delta_h u_h)_{i,j} + h \sum (r_h u_h)_{i,j} = 0$$

для любой сеточной функции. Поэтому имеем

$$\alpha_h = \frac{1}{N_h h^2} \left[h^2 \sum_{(i,j) \in \Omega_h} (\tilde{\Pi}_h^0(f))_{i,j} + h \sum_{(i,j) \in \Omega_h^1} (\tilde{\Pi}_h^1(\varphi))_{i,j} \right]. \quad (2.116)$$

При таком выборе α_h система (2.114), (2.115) совместна и при условии (2.109) имеет единственное решение u_h — приближенное решение задачи (2.14), (2.99) при условии (2.101).

З а м е ч а н и е 1. Если $\alpha_h \neq 0$, то правые части каждого из уравнений (2.114), (2.115) зависят также от значений f и φ в далеких от (i, j) точках, а не только от значений f и φ в окрестности (i, j) .

Для того чтобы уравнения (2.114), (2.115) имели «локальный» характер и правые части граничных уравнений (2.115) не зависели от f , необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_h = 0$ и $(\tilde{\Pi}_h^0(f))_{i,j} = 0$, $(i, j) \in \Omega_h^1$, т. е. чтобы $\tilde{\Pi}_h^0(f)$ и $\tilde{\Pi}_h^1(\varphi)$ удовлетворяли условию (2.106), являющемуся сеточным аналогом для уравнения (2.100). Для этого достаточно воспользоваться (2.107) и (2.108).

В работах [42], [43] для случая $f \equiv 0$ рассмотрено несколько примеров выбора $\tilde{\Pi}_h^1(\varphi)$ со свойствами «локальности». В этих работах левые части (2.115) записаны для \sum_{Γ} .

З а м е ч а н и е 2. Предложенный здесь способ учета граничных условий можно назвать «простым сносом». Можно было бы в качестве сеточного аналога $\int_{\Gamma} \varphi u \, d\Gamma$ взять сумму

$$h \sum_{(i,j) \in \Omega_h^1} \left[\left(1 + \frac{\delta}{h}\right) u_{i,j} - \frac{\delta}{h} u_{i',j'} \right] (\tilde{\Pi}_h^1(\varphi))_{i,j}$$

учитывая этим самым граничные значения линейной интерполяцией. Этот прием не изменил бы левых частей уравнений (2.114) и (2.115) и несколько усложнил бы правые части; при этом формула (2.116) осталась бы в силе.

в) Сходимость и оценка погрешности. Будем говорить, что сеточная функция u_h сходится к некоторой непрерывной функции $u(x, y)$ по норме L_2 , если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(h^2 \sum_{(i,j) \in \Omega_h} (u_{i,j} - u(ih, jh))^2 \right) = 0.$$

Доказано [108], что для $\varphi \equiv 0$ и при выборе $(\tilde{\Pi}_h^0(f))_{i,j} \equiv f_{i,j}$ решение системы (2.109), (2.114), (2.115) и его разностные отношения $\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}$, $\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h}$ сходятся по норме L_2 к точному решению задачи (2.14), (2.99), (2.101) и его производным $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ соответственно.

В работах [44], [45] приводятся некоторые оценки погрешности $u_n - u$ и разделенных разностей этой погрешности.

8. Задача о собственных значениях эллиптического оператора. Число λ называется *собственным значением* самосопряженного эллиптического оператора

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - gu \quad (2.117)$$

для граничного условия (Ω — область n -мерного пространства, Γ — ее граница)

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (2.118)$$

если существует отличная от тождественного нуля функция $u(X)$, удовлетворяющая на Γ условию (2.118) и в области Ω уравнению

$$Lu + \lambda u = 0. \quad (2.119)$$

Функция $u(X)$ называется *собственной функцией*, отвечающей собственному значению λ . Собственная функция называется *нормированной*, если

$$I[u, u] \equiv \int_{\Omega} u^2 d\Omega = 1. \quad (2.120)$$

Пусть область Ω конечна, функции $g(X)$ и $a_{i,j}(X)$ непрерывны в замкнутой области Ω и $a_{i,j}(X)$ удовлетворяют условию: существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что для всех $X \in \Omega$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}(X) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2,$$

где $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ — произвольные n вещественных чисел. В этих условиях множество собственных чисел счетно, и если их занумеровать в порядке роста, то $\lambda \xrightarrow{(k)} +\infty$ при $k \rightarrow \infty$, где $\lambda^{(k)}$ — собственное число с номером k .

Задача о собственных значениях — задача определения собственных чисел для заданных Ω, L . Точно эта задача решается для весьма частных случаев области Ω и оператора L .

Основой для приближенного вычисления $\lambda^{(k)}$ служит следующий факт: число $\lambda^{(1)}$ является точной нижней границей функционала

$$E[u] \equiv \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + gu^2 \right] d\Omega \quad (2.121)$$

в классе функций, удовлетворяющих условиям (2.118) и (2.120); если $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k-1)}$ уже найдены и $u^{(1)}, \dots, u^{(k-1)}$ — соответствующие им собственные функции, то $\lambda^{(k)}$ является точной нижней границей функционала (2.121) в классе функций, удовлетворяющих условиям (2.118) и (2.120) и $k-1$ условиям ортогональности

$$I[u, u^{(i)}] \equiv \int_{\Omega} uu^{(i)} d\Omega = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k-1). \quad (2.122)$$

Для простоты записи и рассуждений предположим, что Ω — область плоскости Oxy и $L = \Delta$ — оператор Лапласа. При этом $E[u]$ примет вид

$$E[u] = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega = \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 d\Omega. \quad (2.123)$$

Рассмотрим различные сеточные аналоги для (2.123), (2.120), (2.122).

а) Конечно-разностная замена. Рассмотрим квадратную сетку на плоскости и будем считать $u_{i,j} = 0$ для каждого узла (i, j) плоскости, который не является внутренним узлом для Ω_h (в смысле пятиточечной звезды). Тогда положим

$$E_h[u_h] \equiv h^2 \sum_{(i,j)} \left[\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \right)^2 + \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} \right)^2 \right], \quad (2.124)$$

где суммирование можно считать распространенным на все узлы плоскости (на самом деле лишь конечное число слагаемых суммы отлично от нуля, если $u_{i,j} \neq 0$ хотя бы для одного внутреннего узла (i, j));

$$I_h[u_h, v_h] \equiv h^2 \sum_{(i,j) \in \Omega_h^0} u_{i,j} v_{i,j}. \quad (2.125)$$

Граничное условие (2.118) учтено тем, что положили

$$u_{i,j} = 0, \quad (i, j) \in \bar{\Omega}_h^0. \quad (2.126)$$

Выражения $E_h[u_h]$ и $I_h[u_h, u_h]$ являются квадратичными формами переменных $u_{i,j}$, $(i, j) \in \Omega_h^0$. Требуется найти такие $u_{i,j}$, для которых $E_h[u_h]$ достигала бы минимума при условии, что $I_h[u_h, u_h] = 1$.

Как известно, эти значения $u_{i,j}$ образуют решение системы N_h^0 линейных однородных уравнений, полученных приравниванием нулю производных от $E_h[u_h] - \lambda_h I[u_h, u_h]$ по каждому $u_{i,j}$, $(i, j) \in \Omega_h^0$ (λ_h — множитель Лагранжа). Это приводит к системе уравнений вида

$$\begin{aligned} &u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + \\ &+ u_{i,j-1} - (4 - \lambda_h h^2) u_{i,j} = 0, \quad (i, j) \in \Omega_h^0, \end{aligned} \quad (2.127)$$

причем в некоторых из уравнений часть из первых четырех слагаемых должна быть заменена нулями в силу (2.126).

Для того чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю. Определитель этой системы является многочленом N_h^0 -й степени от λ_h . Все корни этого многочлена вещественны и положительны (как собственные числа симметричной положительно определенной матрицы). Пусть

$$\lambda_h^{(1)} \leq \lambda_h^{(2)} \leq \dots \leq \lambda_h^{(N_h^0)} \quad (2.128)$$

— корни этого многочлена. Доказано [38], что при $h \rightarrow 0$ для каждого фиксированного k справедливо

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda_h^{(k)} = \lambda^{(k)}, \quad (2.129)$$

что дает основание считать $\lambda_h^{(k)}$ приближенным значением для $\lambda^{(k)}$.

Замечание 1. В этом способе граничное условие (2.118) учитывалось простым сносом. Можно учесть граничное условие (2.118) либо по Коллатцу, либо по Микеладзе. Один из путей такого учета в задаче о собственных значениях описан в статье [91], в которой кроме (2.129) даны также оценки погрешности $|\lambda_h^{(k)} - \lambda^{(k)}|$ при $h \rightarrow 0$.

Замечание 2. Утверждения (2.129) и оценки для $|\lambda_h^{(k)} - \lambda^{(k)}|$ получены в указанных работах для оператора (2.117) общего вида.

б) Полилинейная интерполяция. Под $\Omega(h)$ будем понимать область, составленную из всех квадратов сетки, полностью принадлежащих Ω ; $\Gamma(h)$ — контур области Ω_h .

Пусть u_h — произвольная сеточная функция, равная нулю в узлах, лежащих на $\Gamma(h)$. В соответствие такой функции u_h поставим функцию $\tilde{u}_h(x, y)$, определенную и непрерывную в Ω :

$$\tilde{u}_h(x, y) = 0, \text{ если } (x, y) \in \Omega, \text{ но } (x, y) \notin \Omega(h);$$

$\tilde{u}_h(x, y)$ совпадает с u_h в каждом узле (i, j) , лежащем в $\Omega(h)$;

в каждом квадрате, образующем $\Omega(h)$, $\tilde{u}_h(x, y)$ полилинейна, т. е. линейна по каждому из аргументов в отдельности, а именно:

$$\tilde{u}_h(x, y) = \frac{1}{h^2} [u^{(0,0)}(h-x)(h-y) + u^{(1,0)}x(h-y) + \\ + u^{(0,1)}(h-x)y + u^{(1,1)}xy],$$

где $u^{(0,0)}$, $u^{(1,0)}$, $u^{(0,1)}$, $u^{(1,1)}$ — значения u_h в вершинах квадрата, одна из вершин которого принята за начало координат, а три другие имеют координаты $(h, 0)$, $(0, h)$, (h, h) .

Для функции $\tilde{u}_h(x, y)$ функционалы $E[\tilde{u}_h]$ и $I[\tilde{u}_h, \tilde{u}_h]$ являются квадратичными формами величин $u_{i,j}$ ($(i, j) \rightarrow$ узлы в $\Omega(h)$). Приравняв нулю производные от $E[\tilde{u}_h] - \tilde{\lambda}_h I[\tilde{u}_h, \tilde{u}_h]$ по каждому $u_{i,j}$ и рассуждая далее, как в случае а), найдем числа

$$\tilde{\lambda}_h^{(1)} \leq \tilde{\lambda}_h^{(2)} \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_h^{(N_h^0)},$$

где N_h^0 — число узлов, лежащих внутри $\Omega(h)$. Оказывается, что $\tilde{\lambda}_h^{(k)} \geq \lambda^{(k)}$ и $\tilde{\lambda}_h^{(k)} \rightarrow \lambda^{(k)}$ при $h \rightarrow 0$. Таким образом, при таком способе получаются приближенные значения для $\lambda^{(k)}$ по избытку; следовательно, $\tilde{\lambda}_h^{(k)}$ дает верхнюю границу для $\lambda^{(k)}$.

Каждый узел (i, j) внутри $\Omega(h)$ сделаем центром девятиточечной звезды (см. рис. 4). Тогда каждому такому узлу ставится в соответствие уравнение

$$(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 - 8u_0) + \\ + \frac{h^2 \tilde{\lambda}_h}{12} [4(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + (u_5 + u_6 + u_7 + u_8) + 16u_0] = 0,$$

т. е.

$$\left(1 + \frac{h^2 \tilde{\lambda}_h}{3}\right) (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + \\ + \left(1 + \frac{h^2 \tilde{\lambda}_h}{12}\right) (u_5 + u_6 + u_7 + u_8) - \\ - \left(8 - \frac{4}{3} h^2 \tilde{\lambda}_h\right) u_0 = 0, \quad (2.130)$$

где u_0, u_1, \dots, u_8 — значения u_h в центре и узлах звезды. Уравнений вида (2.130) столько, сколько узлов (i, j) внутри $\Omega(h)$. Если среди узлов звезды встречаются лежащие на $\Gamma(h)$, то соответствующие значения u_h надо считать равными нулю. Числа $\tilde{\lambda}_h^{(1)}, \dots, \tilde{\lambda}_h^{(N_h^0)}$ являются корнями определителя системы уравнений (2.130).

З а м е ч а н и е 1. Числа $\tilde{\lambda}_h^{(1)}, \dots, \tilde{\lambda}_h^{(k)}$ являются верхними границами для $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}$. Для получения нижней границы первого собственного числа $\lambda^{(1)}$ можно поступить так. Пусть $\Omega^*(h)$ означает область, составленную из всех квадратов сетки, каждый из которых содержит хотя бы одну такую точку (x, y) , что найдутся (α, β) ($0 \leq \alpha \leq h, 0 \leq \beta \leq h$), для которых точка $(x + \alpha, y + \beta)$ принадлежит Ω . Область $\Omega^*(h)$ содержит в себе всю область Ω . Если для области $\Omega^*(h)$ найти $\lambda_h^{(1)}$ способом, указанным в пункте а) (обозначим его через $\lambda_h^{(1)*}$), то $\lambda_h^{(1)*} < \lambda^{(1)}$ [129].

В работе [130] указан прием для определения нижних границ для $\lambda^{(k)}$.

З а м е ч а н и е 2. Число μ называется *собственным значением* самосопряженного эллиптического оператора (2.117) для граничного условия

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (2.131)$$

(ν — направление конормали [63], [94]), если существует отличная от тождественного нуля функция $u(X)$, удовлетворяющая на Γ условию (2.131) и в Ω уравнению $Lu + \mu u = 0$. Существует последовательность чисел $\mu^{(k)}$ ($\mu^{(k)} \leq \mu^{(k+1)}$), $\mu^{(k)} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Не-

сколько изменяя рассуждения пункта а), можно получить средство для приближенного вычисления $\mu^{(k)}$. Так, в случае, если L —оператор Лапласа Δ , достаточно в сумме (2.124) оставлять только те слагаемые $[h^{-1}(\mu_{i+1, j} - u_{i, j})]^2$ или $[h^{-1}(u_{i, j+1} - u_{i, j})]^2$, для которых оба узла (i, j) и $(i+1, j)$ или (i, j) и $(i, j+1)$ принадлежат Ω_h . Тогда для внутренних узлов уравнение (2.127) заменяется аналогичным (λ_h меняется на μ_h), а для граничных узлов оно примет вид

$$\eta_{i,j}^1 u_{i+1,j} + \eta_{i,j}^2 u_{i,j+1} + \eta_{i,j}^3 u_{i-1,j} + \\ + \eta_{i,j}^4 u_{i,j-1} - (\eta_{i,j}^1 + \eta_{i,j}^2 + \eta_{i,j}^3 + \eta_{i,j}^4 - \mu_h h^2) u_{i,j} = 0,$$

где $\eta_{i,j}^k$ таковы же, как в п. 6 для \sum .

Аналогичное замечание справедливо и для собственных значений для граничного условия $\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \kappa u\right)_\Gamma = 0$.

в) Замечание о нижних границах для $\lambda^{(k)}$. Пусть область Ω есть прямоугольник $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, где a и b соизмеримы. Пусть h —одна из общих мер a и b , таким образом, $a = Mh$, $b = Nh$, где M и N —целые числа, не меньшие двух. Квадратная сетка Ω_h такова, что граничные узлы лежат на контуре. Внутренних узлов в сетке $(M-1)(N-1)$, а $(M-1)(N-1)$ чисел

$$\lambda_h^{(m,n)} = \frac{4}{h^2} \left(\sin^2 \frac{m\pi}{2M} + \sin^2 \frac{n\pi}{2N} \right) = \frac{4}{h^2} \left(\sin^2 \frac{m\pi h}{2a} + \sin^2 \frac{n\pi h}{2b} \right) \\ (1 \leq m \leq M-1, 1 \leq n \leq N-1)$$

являются собственными значениями (2.128) сеточной задачи (2.127). Точными собственными значениями для задачи (2.119) ($L = \Delta$) являются числа

$$\lambda^{(m,n)} = \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \pi^2 \quad (1 \leq m < \infty, 1 \leq n < \infty).$$

Нетрудно видеть, что

$$\lambda_h^{(m,n)} = \lambda^{(m,n)} - \frac{\pi^4 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^4 + \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right]}{12} h^2 + O(h^4), \quad (2.132)$$

где $O(h^4)$ означает бесконечно малую величину одного порядка с h^4 .

Формула (2.132) обобщается на широком классе областей следующим образом.

Пусть для каждого внутреннего узла $(i, j) \in \Omega_h$ записано уравнение (2.127). Для каждого граничного узла (i, j) , не лежащего на Γ , запишем уравнение по способу Микеладзе (см. п. 1):

$$2 \left[\frac{u(Q_1)}{\delta_1(\delta_1 + \delta_3)} + \frac{u(Q_3)}{\delta_3(\delta_1 + \delta_3)} + \frac{u(Q_2)}{\delta_2(\delta_2 + \delta_4)} + \frac{u(Q_4)}{\delta_4(\delta_2 + \delta_4)} - u_{i,j} \left(\frac{1}{\delta_1\delta_3} + \frac{1}{\delta_2\delta_4} \right) \right] + \lambda_h u_{i,j} = 0, \quad (2.133)$$

в котором полагаются равными нулю $u(Q_k)$, если $Q_k \in \Gamma$ ($k = 1, 2, 3, 4$). Система уравнений, полученная объединением уравнений (2.127) и (2.133), может быть записана в матричной форме так:

$$A_h u_h + \lambda_h u_h = 0, \quad (2.134)$$

где матрица A_h , вообще говоря, несимметрична в случае наличия уравнений (2.133). Пусть $\bar{A}_h = \frac{1}{2} (A_h + A_h^T)$, где A_h^T — транспонированная матрица для A_h . Вместо уравнения (2.134) рассмотрим уравнение

$$\bar{A}_h u_h + \bar{\lambda}_h u_h = 0.$$

Числа $\bar{\lambda}_h^{(k)}$ являются корнями определителя матрицы $(\bar{A}_h + \bar{\lambda}_h E)$, являющегося многочленом степени N'_h , где N'_h — число узлов Ω_h , не лежащих на Γ . Будем считать, что корни занумерованы так, что

$$\bar{\lambda}_h^{(1)} \leq \bar{\lambda}_h^{(2)} \leq \dots \leq \bar{\lambda}_h^{(N'_h)}.$$

Доказывается [116], что если Ω есть область, граница Γ которой состоит из конечного числа аналитических кривых, образующих в точках стыка угловые точки с внутренним углом меньше π , то существуют числа $\gamma^{(k)}$ такие, что

$$\bar{\lambda}_h^{(k)} = \lambda^{(k)} - \gamma^{(k)} h^2 + o(h^2),$$

где $o(h^2)$ — бесконечно малая порядка высшего по сравнению с h^2 .

Если область Ω к тому же выпуклая, то $\gamma^{(k)} > 0$ и, следовательно, для каждого k существует такое $h(k)$, что для

всех $h < h(k)$ имеет место неравенство

$$\bar{\lambda}_h^{(k)} < \lambda^{(k)},$$

т. е. $\bar{\lambda}_h^{(k)}$ есть нижняя граница для $\lambda^{(k)}$.

§ 2. Уравнения гиперболического и параболического типов

1. Задача Коши. Выбор решетки и сходимость сеточных решений. а) Гиперболическое уравнение. Простейшим гиперболическим уравнением является уравнение колебаний струны (*волновое одномерное уравнение*)

$$\square u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (2.135)$$

где $f(x, t)$ —заданная функция.

Задача Коши для уравнения (2.135) ставится так. В полуплоскости $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ найти решение уравнения (2.135), удовлетворяющее на границе $t=0$ начальным условиям

$$l_1 u \Big|_{t=0} \equiv u \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad (2.136)$$

$$l_2 u \Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x), \quad (2.137)$$

где $\varphi(x)$, $g(x)$ —заданные функции. Решение задачи (2.135), (2.136), (2.137) определяется формулой (*решение Даламбера*) [98]

$$u(x_0; t_0) = \frac{\varphi(x_0 - t_0) + \varphi(x_0 + t_0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x_0 - t_0}^{x_0 + t_0} g(x) dx + \\ + \frac{1}{2} \iint_{D(x_0, t_0)} f(x, t) dx dt, \quad (2.138)$$

где $D(x_0, t_0)$ —треугольник плоскости Oxt , ограниченный осью $t=0$ и прямыми («характеристиками») $x+t=x_0+t_0$, $x-t=x_0-t_0$, проходящими через (x_0, t_0) . Из (2.138) следует, что $u(x, t)$ определяется значениями φ и g в точках основания треугольника $D(x_0, t_0)$ и значениями f внутри и на контуре треугольника.

Рассмотрим прямоугольную сетку $x_k = kh$, $t_j = j\tau$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $j=0, 1, 2, \dots$). Совокупность узлов (k, j)

($-\infty \leq k \leq \infty$) назовем j -м рядом сетки. Наиболее простая замена задачи (2.135), (2.136), (2.137) сеточной такова:

$$\square_h u_h \equiv \frac{u_{k,j+1} - 2u_{k,j} + u_{k,j-1}}{\tau^2} - \frac{u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}}{h^2} = (f)_{k,j} \quad (2.139)$$

$$\begin{aligned} & (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots; j=1, 2, \dots), \\ u_{k,0} &= \varphi(kh) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned} \quad (2.140)$$

$$\frac{u_{k,1} - u_{k,0}}{\tau} = g(kh) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2.141)$$

Из уравнений (2.140) и (2.141) u_h определяется в нулевом и первом рядах сетки ($u_{k,0} = \varphi(kh)$, $u_{k,1} = \varphi(kh) + \tau g(kh)$). Уравнения (2.139) таковы, что $u_{k,j+1}$ однозначно определяется через значения сеточной функции u_h в узлах j -го и $(j-1)$ -го рядов ($j=1, 2, \dots$). Отсюда следует однозначная разрешимость системы (2.139), (2.140), (2.141).

Введем обозначения: $\frac{\tau}{h} = \sigma$, $D_\sigma(x_0, t_0)$ — треугольник, ограниченный осью $t=0$ и прямыми $\sigma x + t = \sigma x_0 + t_0$, $\sigma x - t = \sigma x_0 - t_0$, проходящими через (x_0, t_0) . Нетрудно видеть, что значение сеточного решения u_h системы (2.139), (2.140), (2.141) в узле (k_0, j_0) однозначно определяется значениями φ , g в узлах, лежащих на основании треугольника $D_\sigma(k_0 h, j_0 \tau)$ и значениями f в узлах внутри и на границе $D_\sigma(k_0 h, j_0 \tau)$.

Пусть имеется последовательность сеток таких, что $h \rightarrow 0$, $\tau = \sigma h$, $\sigma = \text{const} > 1$, и некоторая точка (x_0, t_0) ($t_0 > 0$) является узлом каждой сетки последовательности. Если $u_h(x_0, t_0)$ имеет предел $u_0(x_0, t_0)$ при $h \rightarrow 0$, то последний определяется значениями f , φ , g в $D_\sigma(x_0, t_0)$ и, вообще говоря, отличен от $u(x_0, t_0)$ — значения в (x_0, t_0) решения задачи (2.135), (2.136), (2.137), определяемого значениями f , φ , g в треугольнике $D(x_0, t_0)$, содержащем $D_\sigma(x_0, t_0)$ как часть в случае $\sigma > 1$. Поэтому в случае $\sigma > 1$ последовательность u_h , вообще говоря, не сходится к точному решению задачи (2.135), (2.136), (2.137).

Пусть функции $f(x, t)$, $\varphi(x)$ и $g(x)$ достаточно гладкие соответственно в полуплоскости $t \geq 0$ и на оси $-\infty < x < \infty$.

Теорема 4. Если $\sigma = \text{const} \leq 1$, то при $h \rightarrow 0$ последовательность u_h решений задачи (2.139), (2.140), (2.141) сходится равномерно к точному решению $u(x, t)$ задачи (2.135), (2.136), (2.137) во всякой конечной области полуплоскости $t \geq 0$.

В случае $\sigma = 1$ имеется простая оценка погрешности.

а) Если φ' и g непрерывны и $\delta_f(h)$, $\delta_{\varphi'}(h)$, $\delta_g(h)$ — модули непрерывности внутри (для f) и на основании (для φ' , g) треугольника $D(x, t)$, то

$$|u_h(x, t) - u(x, t)| \leq t (\|f\| \cdot h + \delta_f(h) + \delta_g(h) + \delta_{\varphi'}(h)), \quad (2.142)$$

где

$$\|f\| = \max_{D(x, t)} |f|.$$

б) Если $f \in C^2$, $g \in C^2$, $\varphi \in C^2$, то

$$|u_h(x, t) - u(x, t)| \leq (\|f\| + M_f^{(2)} \cdot th + M_g^{(2)} \cdot h + M_{\varphi}^{(2)} \cdot th). \quad (2.143)$$

в) Если ввести вспомогательные узлы $(k, -1)$, к системе (2.139) добавить уравнение для $j=0$ и (2.141) заменить на

$$\frac{u_{k,1} - u_{k,-1}}{2\tau} = g(kh), \quad (2.144)$$

то новая система будет также однозначно разрешима, и в правых частях неравенств (2.142) и (2.143) надо заменить $\|f\|$, $\delta_{\varphi'}(h)$, $M_{\varphi}^{(2)}$ нулями. Неравенства (2.142) и (2.143) являются примерами оценок погрешности через данные задачи.

б) Параболическое уравнение. Простейшим параболическим уравнением является уравнение теплопроводности стержня (уравнение Фурье)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (2.145)$$

при наличии источников тепла ($f \neq 0$). В случае, если источники тепла отсутствуют, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (2.146)$$

Задача Коши для уравнения (2.145) ставится так. В полуплоскости $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$ найти решение уравнения (2.145), удовлетворяющее на границе $t=0$ начальному условию (2.136).

Известно [98], что значение решения $u(x, t)$ задачи (2.145), (2.136) в точке (x_0, t_0) определяется значениями $f(x, t)$ в полосе $D_0(x_0, t_0)$ ($0 \leq t \leq t_0$, $-\infty < x < \infty$) и значениями $\varphi(x)$ на всей числовой оси $-\infty < x < \infty$ («бесконечная скорость распространения тепла»).

Для прямоугольной сетки ($x_k = kh$, $t_j = j\tau$, $\tau = \sigma h$) уравнение (2.145) естественно заменить сеточным

$$\frac{u_{k, j+1} - u_{k, j}}{\tau} - \frac{u_{k+1, j} - 2u_{k, j} + u_{k-1, j}}{h^2} = (f)_{k, j} \quad (2.147)$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots; j=0, 1, 2, \dots),$$

а условие (2.136)—условием (2.140). Система (2.147), (2.140) однозначно разрешима, так как из (2.147) определяется однозначно u_k в $(j+1)$ -м ряде, если u_k известна в j -м ряде узлов ($j \geq 0$), а из (2.140) u_k известна в нулевом ряде.

Нетрудно видеть, что значение сеточного решения u_k системы (2.147), (2.140) в узле (k_0, j_0) однозначно определяется значениями $f(x, t)$ внутри и на границе треугольника $D_\sigma(k_0 h, j_0 \tau)$ и значениями $\varphi(x)$ в узлах на основании треугольника $D_\sigma(k_0 h, j_0 \tau)$, лежащего внутри полосы $D_0(k_0 h, j_0 \tau)$ при любом как угодно малом $\sigma > 0$. Если имеется последовательность сеток ($h \rightarrow 0$, $\tau = \sigma h$, $\sigma = \text{const}$) и точка (x_0, t_0) является узлом каждой сетки, то, вообще говоря, $u_k(x_0, t_0)$ не будет стремиться к значению $u(x_0, t_0)$ точного решения. Для того чтобы $u_k(x_0, t_0) \rightarrow u(x_0, t_0)$ при любых данных $f(x, t)$ и $\varphi(x)$, необходимо, чтобы $\sigma \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ (т. е. чтобы боковые стороны равнобедренного треугольника $D_\sigma(x_0, t_0)$ стремились слиться с полупрямыми $t = t_0$, $x < x_0$, $x > x_0$).

Положим $r = \frac{\tau}{h^2}$. Пусть $u(x, t)$ имеет в полосе $0 \leq t \leq T$ равномерно-непрерывные производные $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Теорема 5. Если $r \leq \frac{1}{2}$, то сеточное решение u_k системы (2.147), (2.140) стремится при $h \rightarrow 0$ равномерно (в полосе $0 \leq t \leq T$) к точному решению $u(x, t)$ задачи (2.145), (2.136).

Рассмотрим более общее уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + g(x, t) u = f(x, t), \quad (2.148)$$

где коэффициенты $a(x, t)$, $b(x, t)$, $g(x, t)$ удовлетворяют в полосе $0 \leq t \leq T$ условиям

$$0 < a(x, t) \leq A, \quad |b(x, t)| \leq Ma(x, t), \quad 0 \leq g(x, t) \leq G, \quad (2.149)$$

A, M, G —числа ($A > 0, M \geq 0, G \geq 0$).

Сеточное уравнение

$$\frac{u_{k,j+1} - u_{k,j}}{\tau} - (a)_{k,j} \frac{u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}}{h^2} - (b)_{k,j} \frac{u_{k+1,j} - u_{k-1,j}}{2h} + (g)_{k,j} u_{k,j} = (f)_{k,j} \quad (2.150)$$

заменяет уравнение (2.148). Система (2.150), (2.140) также однозначно разрешима. Если $h < \frac{2}{M}$, $\tau < h^2 (2A + Gh^2)^{-1}$, то в силу (2.149) система, полученная из (2.150), (2.140) умножением каждого уравнения на -1 , удовлетворяет принципу максимума (см. § 1, п. 3, а), А). Узел $(k, j+1)$ является внутренним со звездой из узлов $(k, j+1)$, $(k+1, j)$, (k, j) , $(k-1, j)$; узел $(k, 0)$ граничный. Функции $v_0(x, t) \equiv t$ и $v_1(x, t) \equiv 1$ удовлетворяют условиям леммы 2 (§ 1, п. 3). Уравнение (2.150) аппроксимирует уравнение (2.148) в классе U функций, имеющих в полосе $0 \leq t \leq T$ равномерно-непрерывные производные $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Отсюда в силу теоремы 3 (§ 1, п. 3) имеет место равномерная сходимость сеточного решения к точному решению $u(x, t)$; отсюда, в частности, следует теорема 4. Из теоремы 3 (§ 1, п. 3) получаются также оценки погрешности. Ограничимся оценкой погрешности для решения системы (2.147), (2.140) в предположении, что $u \in U$ и $u(x, t)$ имеет в полосе $0 \leq t \leq T$ ограниченные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$,

$$\|u_h - u\| \leq T \left[\frac{r}{2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\| + \frac{1}{12} \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\| \right] h^2. \quad (2.151)$$

З а м е ч а н и е 1. Предположим, что $u \in U$ и $u(x, t)$ имеет в полосе $0 \leq t \leq T$ ограниченные производные $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}$, $\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}$. Пусть u_h является решением системы, полученной из (2.147), (2.140) для $r = \frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{6}$ заменой $(f)_{k,j}$ в правых частях (2.147) на

$$\left(f + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \right)_{k,j} \quad (\text{см. § 1, п. 2, пример 6}). \quad \text{Тогда}$$

$$\|u_h - u\| \leq T \left[\frac{1}{216} \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right\| + \frac{1}{360} \left\| \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right\| \right] \cdot h^4. \quad (2.152)$$

Замечание 2. Если $f \equiv 0$, то $\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \frac{\partial^2 k u}{\partial x^{2k}}$ и $\left\| \frac{\partial^2 k u}{\partial x^{2k}} \right\|$ не превосходит $\|\varphi^{(2k)}(x)\|$. В этом случае оценки (2.151) и (2.152) упрощаются и получаются оценки через данные задачи

$$\|u_h - u\| \leq T \left(\frac{r}{2} + \frac{1}{12} \right) \|\varphi^{(4)}\| \cdot h^2,$$

$$\|u_h - u\| \leq \frac{T}{135} \|\varphi^{(6)}\| \cdot h^4$$

соответственно.

в) Неустойчивость счета. Пусть u_h — решение системы (2.147), (2.140). Для сходимости u_h к точному решению u необходимо, чтобы $\sigma \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, и достаточно, чтобы $r \leq \frac{1}{2}$. Если $r = \text{const}$ при $h \rightarrow 0$, то $\sigma \rightarrow 0$ ($\sigma = rh$), но при $r > \frac{1}{2}$, вообще говоря, сходимости $u_h \rightarrow u$ может и не быть. Более того, система (2.147), (2.140) для $r > \frac{1}{2}$ весьма чувствительна к ошибкам счета, в частности к ошибкам округления, которые неизбежны при действительных вычислениях.

Вычисления u_h ведутся так: из (2.140) известны значения u_h в узлах $(k, 0)$; по ним в силу (2.147) для $j=0$ вычисляются значения в узлах $(k, 1)$, затем в узлах $(k, 2)$ и т. д.

Допустим, что при вычислении $u_{0,1}$ за счет округления возникла ошибка ε , но все последующие вычисления проводятся абсолютно точно. Приведем таблицы (табл. 19) распространения возникшей ошибки, подсчитанные по формуле

$$\varepsilon_{k,j+1} = \varepsilon_{k,j} + r(\varepsilon_{k+1,j} - 2\varepsilon_{k,j} + \varepsilon_{k-1,j}), \quad \varepsilon_{0,1} = \varepsilon,$$

$$\varepsilon_{k,1} = 0 \quad (k \neq 0).$$

Из таблицы 19 для $r = \frac{1}{4}$ видно, что одиночная ошибка ε в последующем оказывает все меньшее влияние на значения $u_{k,j}$. Из таблицы 19 для $r = \frac{3}{4}$ видно, что в последующих вычислениях ошибка начинает сказываться все

Таблица 19

		k	0	1	2	3	4	5	6
i	k								
$r = \frac{1}{4}$	1	ε	0	0	0	0	0	0	0
	2	$\frac{\varepsilon}{2}$	$\frac{\varepsilon}{4}$	0	0	0	0	0	0
	3	$\frac{3\varepsilon}{8}$	$\frac{\varepsilon}{4}$	$\frac{\varepsilon}{16}$	0	0	0	0	0
	4	$\frac{5\varepsilon}{16}$	$\frac{15\varepsilon}{64}$	$\frac{3\varepsilon}{32}$	$\frac{\varepsilon}{64}$	0	0	0	0
	5	$\frac{35\varepsilon}{128}$	$\frac{7\varepsilon}{32}$	$\frac{7\varepsilon}{64}$	$\frac{\varepsilon}{32}$	$\frac{\varepsilon}{256}$	0	0	0
	6	$\frac{63\varepsilon}{256}$	$\frac{105\varepsilon}{512}$	$\frac{15\varepsilon}{128}$	$\frac{45\varepsilon}{1024}$	$\frac{5\varepsilon}{512}$	$\frac{\varepsilon}{1024}$	0	0
	7	$\frac{231\varepsilon}{1024}$	$\frac{99\varepsilon}{512}$	$\frac{495\varepsilon}{4096}$	$\frac{55\varepsilon}{1024}$	$\frac{33\varepsilon}{2048}$	$\frac{3\varepsilon}{1024}$	$\frac{\varepsilon}{4096}$	0
$r = \frac{3}{4}$	1	ε	0	0	0	0	0	0	0
	2	$-\frac{\varepsilon}{2}$	$\frac{3\varepsilon}{4}$	0	0	0	0	0	0
	3	$\frac{11\varepsilon}{8}$	$-\frac{3\varepsilon}{4}$	$\frac{9\varepsilon}{16}$	0	0	0	0	0
	4	$-\frac{29\varepsilon}{16}$	$\frac{117\varepsilon}{64}$	$-\frac{27\varepsilon}{32}$	$\frac{27\varepsilon}{64}$	0	0	0	0
	5	$\frac{467\varepsilon}{128}$	$-\frac{93\varepsilon}{32}$	$\frac{135\varepsilon}{64}$	$-\frac{27\varepsilon}{32}$	$\frac{81\varepsilon}{256}$	0	0	0
	6	$-\frac{1583\varepsilon}{256}$	$\frac{2955\varepsilon}{512}$	$-\frac{495\varepsilon}{128}$	$\frac{2295\varepsilon}{1024}$	$-\frac{405\varepsilon}{512}$	$\frac{243\varepsilon}{1024}$	0	0
	7	$\frac{12031\varepsilon}{1024}$	$-\frac{5337\varepsilon}{512}$	$\frac{32535\varepsilon}{4096}$	$-\frac{4725\varepsilon}{1024}$	$\frac{4617\varepsilon}{2048}$	$-\frac{729\varepsilon}{1024}$	$\frac{729\varepsilon}{4096}$	0

сильней (раскачивается) и практически вычисления потеряют всякий смысл. Поэтому использование сеточных уравнений (2.147), (2.140) при $r > \frac{1}{2}$ для приближенного вычисления u_h неразумно даже в тех редких случаях, когда теоретически возможна сходимость u_h к точному решению $u(x, t)$. Аналогичное замечание можно сделать и относительно сеточной системы (2.139), (2.140), (2.141) в случае $\sigma > 1$.

2. Смешанная задача. Явные и неявные схемы. Будем рассматривать смешанные задачи для уравнений (2.135) и (2.145) в наиболее простой форме.

Пусть Ω — область $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$ плоскости Oxt , Γ_0 — отрезок $0 \leq x \leq 1$, $t = 0$, Γ_1 — полупрямая $x = 0$, $t \geq 0$, Γ_2 — полупрямая $x = 1$, $t \geq 0$; Γ_0 , Γ_1 , Γ_2 составляют части границы Γ области Ω . Задача ставится так: в области Ω найти решение уравнения (2.135) [(2.145)], удовлетворяющее на Γ_0 начальному условию (2.136), (2.137) [(2.136)] и на Γ_1 и Γ_2 граничным условиям

$$\bar{l}_1 u|_{\Gamma_1} \equiv u|_{\Gamma_1} = \psi_1(t), \quad (2.153)$$

$$\bar{l}_2 u|_{\Gamma_2} \equiv u|_{\Gamma_2} = \psi_2(t). \quad (2.154)$$

Условия согласования данных. Если решение поставленной задачи непрерывно в замкнутой области Ω , то оно непрерывно в точках стыка частей границы Γ_1 , Γ_0 и Γ_2 , Γ_0 и значение $u(0, 0)$ определяется по данным задачи либо как $\varphi(0)$, либо как $\psi_1(0)$. Поэтому для непрерывности решения $u(x, t)$ необходимо выполнение условий

$$\varphi(0) = \psi_1(0)$$

и аналогично

$$\varphi(1) = \psi_2(0).$$

Для непрерывности $\frac{\partial u}{\partial t}$ необходимы условия

$$g(0) = \psi'_1(0), \quad g(1) = \psi'_2(0)$$

(для задачи (2.135), (2.136), (2.137), (2.153), (2.154)) и

$$\varphi''(0) + f(0, 0) = \psi'_1(0), \quad \varphi''(1) + f(1, 0) = \psi'_2(0)$$

(для задачи (2.145), (2.136), (2.153), (2.154)). Полученные здесь необходимые условия непрерывности решения $u(x, t)$ и его производных в точках $(0, 0)$ и $(1, 0)$ называются *условиями согласования данных* смешанной задачи.

Этот список условий можно продолжить, выписывая необходимые условия непрерывности $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^3}$, ... в $(0, 0)$ и $(1, 0)$. В последующем будем предполагать, что условия согласования до некоторого порядка выполнены, и будем считать, что точное решение задачи $u(x, t)$ непрерывно вместе с производными до некоторого порядка в замкнутой области $\Omega + \Gamma$.

Последующее изложение в основном будет посвящено сеточным решениям смешанной задачи (2.145), (2.136), (2.153), (2.154).

Для приближенного решения этой задачи воспользуемся прямоугольной сеткой. Положим $h = \frac{1}{N}$ (N —целое положительное число), τ —произвольное положительное число. Сетка Ω_h ($x_k = kh$, $t_j = j\tau$, $0 \leq k \leq N$, $j = 0, 1, 2, \dots$) такова, что узлы $(0, j)$ и (N, j) лежат на Γ_1 и Γ_2 . В узлах, лежащих на Γ_0 , Γ_1 , Γ_2 , значения u_h примем равными соответствующим значениям φ , ψ_1 , ψ_2 .

Для определения u_h в остальных узлах предлагаются различные системы сеточных уравнений, обладающих общим свойством: значения u_h в узлах $(j+1)$ -го ряда определяются после того, как найдены значения u_h в предыдущих $(j, j-1, \dots)$ рядах (решение «по шагам»). Для определения $u_{k, j+1}$ служит некоторая совокупность уравнений, связывающая $u_{k, j+1}$ с $u_{k', j'}$ ($j' \leq j$). Эту совокупность уравнений обозначим A_{j+1} .

Систему сеточных уравнений называют *явной схемой*, если в каждое уравнение совокупности A_{j+1} входит лишь одно из $u_{k, j+1}$ и, таким образом, каждое из $u_{k, j+1}$ ($k = 1, 2, \dots, N-1$) определяется независимо от других ((2.147) является примером).

Систему сеточных уравнений называют *неявной схемой*, если хотя бы в некоторые из уравнений совокупности A_{j+1} входит более чем одно из значений $u_{k, j+1}$. В этом случае для определения $u_{k, j+1}$ необходимо решать систему, состоящую из уравнений совокупности A_{j+1} .

а) Явная схема. Приведем пример простейшей явной схемы. Узлы $(k, j+1)$ ($1 \leq k \leq N-1$, $j \geq 0$) назовем *внутренними* и каждому такому узлу поставим в соответствие уравнение (2.147); узлам на Γ_0 поставим уравнение (2.140), а узлам на Γ_1 и Γ_2 уравнения

$$u_{0,j} = \psi_1(j\tau), \quad u_{N,j} = \psi_2(j\tau) \quad (j=1, 2, \dots). \quad (2.155)$$

Система (2.147), (2.140), (2.155) однозначно разрешима, и нетрудно видеть, что u_{k_0, j_0} определяется значениями $\varphi(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ и $f(x, t)$ в узлах, лежащих в треугольнике $D_c(k_0 h, j_0 \tau)$; точное же решение задачи $u(k_0 h, j_0 \tau)$ определяется значениями φ на Γ_0 , ψ_1 и ψ_2 на частях $t \leq j_0 \tau$ полупрямых Γ_1 и Γ_2 и f в прямоугольнике $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq j_0 \tau$. Отсюда, как и в задаче Коши, следует, что для сходимости u_h к точному решению при $N \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow 0$ необходимо, чтобы $\sigma = \frac{\tau}{h} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Пусть точное решение $u(x, t)$ задачи (2.145), (2.136), (2.153), (2.154) и его производные $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ непрерывны в прямоугольнике $\Delta(T)$ ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq T$), где $T > 0$ — некоторое число. Пусть $r = \frac{\tau}{h^2}$.

Теорема 6. Если $r \leq \frac{1}{2}$, $h \rightarrow 0$, то сеточное решение u_h системы (2.147), (2.140), (2.155) равномерно в $\Delta(T)$ стремится к точному решению $u(x, t)$.

Замечание 1. Теорема 6 имеет место для более общего уравнения (2.148) и области $\Delta(T)$, где полупрямые Γ_1 и Γ_2 заменены кривыми $x = x_1(t)$ и $x = x_2(t)$ ($x_1(t) < x_2(t)$). Предполагается, что применяется сеточное уравнение (2.150), а условия $u(x_1(t), t) = \psi_1(t)$, $u(x_2(t), t) = \psi_2(t)$ учитываются простым сносом. При этом сеточная система удовлетворяет принципу максимума и корректна (см. теорему 5), откуда и следует утверждение.

Замечание 2. Для системы (2.147), (2.140), (2.155) имеют место оценки погрешности (2.151) и (2.152).

Замечание 3. Если $f \equiv 0$, то

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}.$$

В этом случае

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = v$$

удовлетворяет уравнению (2.146) и условиям

$$v|_{\Gamma_0} = \varphi^{(2k)}(x), \quad v|_{\Gamma_1} = \psi_1^{(k)}(t), \quad v|_{\Gamma_2} = \psi_2^{(k)}(t).$$

Известно [77], что

$$\max_{\Delta(T)} |v| \leq \max \left\{ \max_{\Gamma_0} |v|; \max_{0 \leq t \leq T} |v| \Big|_{\Gamma_1}; \max_{0 \leq t \leq T} |v| \Big|_{\Gamma_2} \right\}.$$

Поэтому в случае $f \equiv 0$ и достаточно гладких φ , ψ_1 , ψ_2 можно получить оценки $\|u_h - u\|$ через данные φ , ψ_1 , ψ_2 .

Ограничение $r = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ является весьма тяжелым, так как число внутренних узлов в $\Delta(T)$ растет при $N \rightarrow \infty$ не медленнее, чем $2N^2 T$. Некоторые неявные схемы для решения той же задачи свободны от ограничения $r \leq \frac{1}{2}$.

б) Неявная схема а. Вместо уравнения (2.147) каждому внутреннему узлу поставим в соответствие уравнение

$$\frac{u_{k,j+1} - u_{k,j}}{\tau} - \frac{u_{k+1,j+1} - 2u_{k,j+1} + u_{k-1,j+1}}{h^2} = (f)_{k,j+1}. \quad (2.156)$$

Теперь сеточная система состоит из уравнений (2.156), (2.140), (2.155). Если значения u_h в рядах $(0, 1, \dots, j)$ известны, то для определения $u_{k,j+1}$ ($k=1, 2, \dots, N-1$) надо решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{h^2} u_{k-1,j+1} + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} \right) u_{k,j+1} - \frac{1}{h^2} u_{k+1,j+1} &= \\ &= (f)_{k,j+1} + \frac{u_{k,j}}{\tau} \\ (k=1, 2, \dots, N-1), \\ u_{0,j+1} &= \psi_1((j+1)\tau), \quad u_{N,j+1} = \psi_2((j+1)\tau), \end{aligned} \right\} \quad (2.157)$$

и, таким образом, система (2.156), (2.140), (2.155) доставляет неявную схему. Нетрудно видеть, что система (2.157) однозначно разрешима и, таким образом, поскольку известны значения u_h в узлах на Γ_0 , Γ_1 , Γ_2 , из (2.157) последовательно определяются значения в рядах: первом ($j=0$), втором ($j=1$) и т. д., т. е. система (2.156), (2.140), (2.155) однозначно разрешима.

Сходимость и оценка погрешности. Для любого $\sigma = \frac{\tau}{h}$ система (2.156), (2.140), (2.155) удовлетворяет принципу максимума, причем уравнения (2.156) отвечают узлам $(k, j+1)$ I рода, а уравнения (2.140), (2.155) отвечают граничным узлам II рода. Очевидно, каждый узел I рода может быть соединен с узлом II рода (хотя бы горизонтальным отрезком). На основании теоремы 2 система однозначно разрешима (для того чтобы не рассматривать бесконечную систему уравнений, ограничимся узлами в $\Delta(T)$). Пусть теперь $N \rightarrow \infty$ и $\tau \rightarrow 0$ произвольным образом. Для области $\Delta(T)$ сеточная система (2.156), (2.140), (2.155) корректна в силу леммы 2, так как функции $v_0(x, t) \equiv t$, $v_1(x, t) \equiv 1$ удовлетворяют условиям леммы.

Если $u(x, t)$ есть решение смешанной задачи, непрерывное вместе с производными $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в $\Delta(T)$, то уравнение (2.156) аппроксимирует (2.145) и поэтому в силу теоремы 2 следует

Теорема 7. Если $N \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow 0$ произвольным образом, то u_h в $\Delta(T)$ сходится равномерно к $u(x, t)$.

Если, кроме того, предположить, что $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ ограничены в $\Delta(T)$, то имеет место оценка погрешности

$$\|u_h - u\| \leq T \left(\frac{\tau}{2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\| + \frac{h^2}{12} \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\| \right). \quad (2.158)$$

Замечание 1. Если $f \equiv 0$, то в оценке (2.158) $\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|$ и $\left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|$ могут быть заменены на

$$\max(\|\varphi^{(4)}(x)\|, \max_{0 \leq t \leq T} |\psi_1''(t)|, \max_{0 \leq t \leq T} |\psi_2''(t)|)$$

(см. замечание 3 к теореме 6).

Замечание 2. Если вместо уравнения (2.150) взять уравнение

$$\frac{u_{k, j+1} - u_{k, j}}{\tau} - (a)_{k, j+1} \frac{u_{k+1, j+1} - 2u_{k, j+1} + u_{k-1, j+1}}{h^2} - (b)_{k, j+1} \frac{u_{k+1, j+1} - u_{k-1, j+1}}{2h} + (g)_{k, j+1} u_{k, j+1} = (f)_{k, j+1}$$

то для области $\tilde{\Delta}(T)$ (см. замечание 1 к теореме 6) при произвольном стремлении $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ справедливо утверждение теоремы 7.

в) Метод прогонки (см. [2], [17], [81], [90]). Для решения линейных систем вида

$$\left. \begin{aligned} -A_k v_{k-1} + B_k v_k - C_k v_{k+1} &= D_k \\ (k = 1, 2, \dots, N-1), \\ v_0 &= a, \quad v_N = b \end{aligned} \right\} \quad (2.159)$$

при условии, что коэффициенты удовлетворяют условиям

$$A_k > 0, \quad B_k > 0, \quad C_k > 0, \quad A_k + C_k < B_k, \quad (2.160)$$

предложен метод, получивший название *метода прогонки*. Частным случаем системы (2.159) является система (2.157).

Для решения системы (2.159) надо

а) вычислить числа E_k, F_k ($k = 0, 1, \dots, N-1$):

$$E_0 = 0, \quad E_k = \frac{C_k}{B_k - A_k E_{k-1}} \quad (k = 1, 2, \dots, N-1),$$

$$F_0 = a, \quad F_k = \frac{D_k + A_k F_{k-1}}{B_k - A_k E_{k-1}} \quad (k = 1, 2, \dots, N-1)$$

(*прямой ход прогонки*);

б) вычислить числа

$$v_N = b, \quad v_k = E_k v_{k+1} + F_k \quad (k = N-1, N-2, \dots, 1)$$

(*обратный ход прогонки*).

При таком способе вычислений в силу условий (2.160) числа E_k удовлетворяют неравенству $0 < E_k < 1$ ($k = 1, 2, \dots, N-1$), что выгодно отличает метод прогонки от других возможных точных методов решения системы (2.159).

г) Пример семейства неявных схем. Пусть α и θ — произвольные числа. Уравнение

$$\frac{u_{k,j+1} - u_{k,j}}{\tau} \left\{ \alpha \frac{u_{k+1,j+1} - 2u_{k,j+1} + u_{k-1,j+1}}{h^2} + \right. \\ \left. + (1-\alpha) \frac{u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}}{h^2} \right\} = f(kh, (j+\theta)\tau) \quad (2.161)$$

аппроксимирует уравнение (2.145) в классе функций, непрерывных вместе с производными $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в $\Delta(T)$.

При $\alpha = \theta = 0$ получаем уравнение (2.147), при $\alpha = \theta = 1$ — уравнение (2.156). Для каждого $\alpha \neq 0$ система (2.161), (2.140),

(2.155) представляет неявную схему. Эта система однозначно разрешима при $\alpha \geq 0$ и удовлетворяет принципу максимума и корректна в $\Delta(T)$ при выполнении условий

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad r = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2(1-\alpha)}. \quad (2.162)$$

Поэтому при выполнении условий (2.162) решение u_h системы (2.162), (2.140), (2.155) равномерно в $\Delta(T)$ стремится к точному решению $u(x, t)$.

3. Устойчивость разностной схемы. Признаки устойчивости. а) Пример 23. Пусть ставится задача: в области Ω ($0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$) найти решение уравнения (2.145), удовлетворяющее на отрезке Γ_0 ($t=0$, $0 \leq x \leq 1$) начальному условию (2.136), на полупрямой Γ_1 ($x=0$, $t \geq 0$) граничному условию (2.153) и на полупрямой Γ_2 ($x=1$, $t \geq 0$) граничному условию

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \psi_2(t). \quad (2.163)$$

Можно предложить следующие сеточные уравнения для прямоугольной сетки Ω_h ($x_k = kh$, $t_j = j\tau$, $h = \frac{1}{N + \frac{1}{2}}$, где N — целое число). Узлы (k, j) ($1 \leq k \leq N$, $j \geq 2$) назовем *внутренними* и для каждого такого узла напишем уравнение (Ричардсон, 1910 г.)

$$\frac{u_{k,j+1} - u_{k,j-1}}{2\tau} - \frac{u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}}{h^2} = (f)_{k,j} \quad (2.164)$$

$$(k=1, 2, \dots, N; j=2, 3, \dots),$$

аппроксимирующее уравнение (2.145) с оценкой

$$\frac{1}{3} \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right\| \tau^2 + \frac{1}{12} \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\| h^2.$$

в классе функций, которые можно продолжать за полупрямую Γ_2 с сохранением непрерывности производных по x до четвертого порядка. Аппроксимация уравнения (2.145) уравнением (2.164) лучше, чем уравнением (2.147) или уравнением (2.156). В узлах, лежащих на Γ_0 и Γ_1 , положим u_h равным соответственно φ и ψ_1 . Для сеточной замены усло-

вия (2.163) введем вспомогательные узлы $(N+1, j)$, лежащие на расстоянии $\frac{h}{2}$ от Γ_2 . Уравнение

$$\frac{u_{N+1,j} - u_{N,j}}{h} = \psi_2(j\tau) \quad (j=1, 2, \dots) \quad (2.165)$$

аппроксимирует уравнение (2.163) с оценкой $\frac{1}{24} \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right\| h^2$. Уравнение (2.165) позволяет находить $u_{N+1,j}$, если известно $u_{N,j}$. Уравнение (2.164) позволяет находить u_h во внутренних узлах $(j+1)$ -го ряда, если известны значения u_h в двух предыдущих рядах— j -м и $(j-1)$ -м. Поэтому для полного определения сеточной функции на всей сетке Ω_h достаточно указать значение u_h во внутренних узлах первого ряда. Тогда

$$u_{0,1} = \psi_1(\tau), \quad u_{N+1,1} = u_{N,1} + h\psi_2(\tau)$$

и u_h будет известно во всех узлах первого ряда. Из уравнения (2.164) для $j=1$ определяется u_h во внутренних узлах второго ряда и затем и во всех его узлах. Таким же образом u_h определится далее на всей сетке.

Для определения u_h в первом ряде предложим, например, такой способ. Из уравнения (2.145) для $t=0$ и из (2.136) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi''(x) + f(x, 0).$$

Поэтому в силу $u(x, \tau) \approx \varphi(x) + \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0}$ естественно положить

$$u_{k,1} = \varphi(kh) + \tau [\varphi''(kh) + f(kh, 0)] \quad (k=1, 2, \dots, N).$$

Можно было бы дифференцированием по t уравнения (2.145) получить аналогичным путем $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{t=0}$ и уточнить $u_{k,1}$ или вычислить u_h в нескольких последующих рядах.

Описанная здесь схема получения приближенного решения задачи на первый взгляд кажется выгодной в смысле хороших оценок аппроксимаций применяемых сеточных уравнений. На самом же деле эта схема будет в последующем забракована в силу ее неустойчивости.

б) Сеточная (разностная) схема решения смешанной задачи для уравнений гиперболического и параболического типов. Пусть Lu — линейный дифференциальный оператор порядка s , содержащий дифференцирование только по переменной x с коэффициентами, зависящими от x и t . Пусть p — целое положительное число. Ставится задача: в области Ω ($0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$) найти решение уравнения

$$\frac{\partial^p u}{\partial t^p} - Lu = f(x, t), \quad (2.166)$$

удовлетворяющее p начальным условиям

$$u|_{t=0} = \Phi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \Phi_1(x), \quad \dots, \quad \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x^{p-1}} = \Phi_{p-1}(x), \\ 0 \leq x \leq 1, \quad (2.167)$$

и линейным граничным условиям

$$\bar{l}_1 u = \psi_1(t), \quad \bar{l}_2 u = \psi_2(t), \quad \dots, \quad \bar{l}_s u = \psi_s(t), \quad (2.168)$$

где $\bar{l}_i u$ — линейные комбинации значений $u(x, t)$ и ее производных по x с коэффициентами, являющимися функциями t ; уравнение

$$\alpha(t) u(0, t) + \beta(t) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} + \gamma(t) u(1, t) + \delta(t) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \psi(t)$$

является примером уравнений (2.168).

Так поставленная задача (2.166), (2.167), (2.168) содержит как частные случаи указанные ранее (см. п.2) смешанные задачи для уравнений гиперболических и параболических типов.

Пусть ω_h означает некоторую конечную совокупность точек отрезка $-\varepsilon \leq x \leq 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$):

$$\omega_h \{x_1, x_2, \dots, x_{N_h}\}.$$

Пусть $\tau > 0$ — произвольное число. Сетку Ω_h будем считать состоящей из узлов с координатами $(x_k, j\tau)$ ($x_k \in \omega_h$, $j \geq 0$). Слоем S_j назовем совокупность узлов, лежащих на прямой $t = j\tau$. Пусть u_h — некоторая сеточная функция и $u_h^{(j)}$ есть N_h -мерный вектор, составляющие которого суть значения

функции u_h в узлах слоя S_j . Совокупность сеточных уравнений, заменяющих уравнение (2.166), разобьем на группы по следующему признаку: в группу с номером j включаются те уравнения, в которых содержатся значения u_h в S_j и не содержатся значения в $S_{j'}$, где $j' > j$. Предполагается, что каждая такая группа уравнений в матричной записи имеет вид

$$R^j u_h \equiv \sum_{m=0}^q A_h^{(j, m)} u_h^{(j-m)} = \Pi_h^{(0, j)}(f; \Phi_0, \dots, \Phi_{p-1}; \Psi_1, \dots, \Psi_s), \quad (2.169)$$

где $A_h^{(j, m)}$ —прямоугольная матрица с $N_h - s$ строками и N_h столбцами, $\Pi_h^{(0, j)}$ —оператор, ставящий в соответствие группе функций $f; \Phi_0, \dots, \Phi_{p-1}; \Psi_1, \dots, \Psi_s$ ($N_h - s$)-мерный вектор. Каждое уравнение j -й группы связывает значения сеточной функции в $q+1$ подряд следующих слоях $S_{j-q}, S_{j-q+1}, \dots, S_{j-1}, S_j$, где $q \geq p$ (в примере 23 $p=1, q=2$).

Сеточные уравнения, заменяющие граничные условия (2.168), будем считать записанными в таком виде, что каждое уравнение содержит значение u_h лишь в одном слое и является линейным относительно этих значений; каждому слою отвечает s уравнений, которые запишем в виде

$$(a_h^{(j, n)}, u_h^{(j)}) = \Pi_h^{(j, n)}(f; \Phi_0, \dots, \Phi_{p-1}; \Psi_1, \dots, \Psi_s) \quad (2.170) \\ (n = 1, 2, \dots, s; j = q, q+1, \dots),$$

где $a_h^{(j, n)}$ есть N_h -мерный вектор, $((a, b)$ —знак скалярного произведения векторов a, b), $\Pi_h^{(j, n)}$ —функционал над группой функций $(f; \Phi_0, \dots, \Phi_{p-1}; \Psi_1, \dots, \Psi_s)$.

Предположение А. Для каждого j ($j \geq q$) совокупность уравнений (2.169), (2.170) однозначно разрешима относительно $u_h^{(j)}$.

Из предположения А следует, что если известны $u_h^{(0)}, u_h^{(1)}, \dots, u_h^{(q-1)}$, то u_h однозначно определяется на S_q, S_{q+1}, \dots .

Пусть $\Pi_h(f; \Phi_0, \dots, \Phi_{p-1}; \Psi_1, \dots, \Psi_s)$ —оператор, ставящий в соответствие группе $(f; \Phi_0, \dots, \Phi_{p-1}; \Psi_1, \dots, \Psi_s)$ ($N_h \cdot q$)-мерный вектор, составляющие которого назначаются значениями u_h в слоях S_0, S_1, \dots, S_{q-1} ; в примере 23

оператор Π_h таков:

$$u_{k,0} = \varphi(kh), \quad u_{k,1} = \varphi(kh) + \tau(\varphi'(kh) + f(kh, 0)) \\ (k = 1, 2, \dots, N), \\ u_{0,1} = \psi_1(\tau), \quad u_{N+1,1} = u_{N,1} + h\psi_2(\tau).$$

Если задан оператор Π_h и составлены сеточные уравнения (2.169), (2.170), удовлетворяющие предположению А, то сеточная функция u_h однозначно определяется.

Будем рассматривать решение задачи (2.166), (2.167), (2.168) в фиксированном прямоугольнике $\Delta(T)$ ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq T$). Пусть рассматривается последовательность сеток $\{\Omega_h\}$, $h \rightarrow 0$, таких, что $\tau \rightarrow 0$, $N_h \rightarrow \infty$. Через M_h обозначим число слоев в $\Delta(T)$, т. е. целое число, ближайшее к отношению $\frac{T}{\tau}$ и больше его. Тогда будем иметь следующие векторные пространства: $(N_h \cdot M_h)$ -мерное U_h , $(N_h - s)$ $(M_h - q)$ -мерное F_h , $(M_h - q)$ -мерное пространство Ψ_{nh} ($n = 1, 2, \dots, s$), $(N_h \cdot q)$ -мерное пространство Φ_h . Будем предполагать, что в пространствах U_h , F_h , Ψ_{nh} введены нормы, согласованные с соответствующими функциональными нормами $\|u\|_U$, $\|f\|_F$, $\|\psi_n\|_{\Psi_n}$ (см. § 1, п. 2). В Φ_h введем векторную норму, которую будем считать согласованной сразу с несколькими функциональными нормами $\|\varphi_0\|$, $\|\varphi_1\|$, \dots , $\|\varphi_{p-1}\|$ в том смысле, что для всякой функции $u(x, t) \in U$ имеет место равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\Pi_h(f; \varphi_0, \dots, \varphi_{p-1}; \psi_1, \dots, \psi_s)\|_{\Phi_h} = \\ = K(\|\varphi_0\|, \|\varphi_1\|, \dots, \|\varphi_{p-1}\|), \quad (2.171)$$

где f , $\varphi_0, \dots, \varphi_{p-1}$, ψ_1, \dots, ψ_s определяются равенствами (2.166), (2.167), (2.168) и K есть некоторая однородная первой степени положительная функция всех аргументов (например, $\|\varphi_0\| + \|\varphi_1\| + \dots + \|\varphi_{p-1}\|$ или $\sqrt{\|\varphi_0\|^2 + \|\varphi_1\|^2 + \dots + \|\varphi_{p-1}\|^2}$). Будем говорить, что Π_h аппроксимирует $u(x, t)$ по введенной норме, если $\|u - \Pi_h\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

О п р е д е л е н и е 1. Говорят, что сеточная задача (2.169), (2.170) *устойчива по начальным условиям*, если для всякой сеточной функции u_h , удовлетворяющей однородным уравнениям, соответствующим неоднородным (2.169) и (2.170) (полученным из (2.169) и (2.170) заменой правых частей на

нули), имеет место неравенство

$$\|u_h\|_{U_h} \leq N^{(0)} \|u_h\|_{\Phi_h}, \quad (2.172)$$

где $N^{(0)}$ — положительная постоянная, не зависящая от h .

Определение 2. Говорят, что сеточная задача (2.169), (2.170) *устойчива по правой части*, если для всякой сеточной функции u_h , обращающейся в нуль на слоях S_0, S_1, \dots, S_{q-1} и удовлетворяющей однородным уравнениям, соответствующим (2.170), имеет место неравенство

$$\|u_h\|_{U_h} \leq N^{(1)} \|R_h u_h\|_{F_h},$$

где $N^{(1)}$ не зависит от h ; $R_h u_h$ — оператор, переводящий U_h в F_h и полученный объединением левых частей (2.169). Определение *устойчивости по граничным условиям* аналогично:

$$\|u_h\|_{U_h} \leq N^{(2)} \sum_{n=1}^s \|r_{nh} u_h\|_{\Psi_{nh}},$$

если u_h равен нулю на S_0, \dots, S_{q-1} и удовлетворяет однородным уравнениям (2.169).

Из линейности сеточной задачи легко следует, что если сеточная задача устойчива по начальным условиям, по правой части и по граничным условиям, то она корректна (см. § 1, п. 3, б)). Если $u(x, t) \in U$, уравнения (2.169) и (2.170) аппроксимируют уравнения (2.166) и (2.168), а Π_h аппроксимирует $u(x, t)$, то u_h сходится к $u(x, t)$ при $h \rightarrow 0$ (§ 1, п. 3, теорема 3).

Изучению устойчивости по начальным условиям уделено значительно больше внимания, чем изучению устойчивости по правой части и граничным условиям. Это объясняется тремя факторами: 1) во многих случаях ([83], [116]) из устойчивости по начальным условиям (так называемой *равномерной устойчивости*) следует устойчивость по правой части; 2) большая часть рассматриваемых задач такова, что граничные условия учитываются точно и в оценке погрешности соответствующее слагаемое равно нулю; 3) изучение влияния ошибки, допущенной при вычислении u_h на некотором слое S_j , на значения u_h в последующих слоях S_{j+1}, S_{j+2}, \dots сводится к изучению устойчивости по начальным

условиям. По-видимому, последнее обстоятельство оказалось решающим. В книге [17] дано изложение вопросов устойчивости по правой части и граничным условиям.

В последующем изложении под *устойчивостью разностной схемы* будем понимать устойчивость по начальным условиям.

в) Устойчивость разностной \bullet схемы. Пусть U_h^0 означает совокупность сеточных функций u_h , удовлетворяющих однородным уравнениям (2.169) и (2.170).

Введем нормы: $\|u_h\|_{U_h}$ для $(N_h \cdot M_h)$ -мерного вектора u_h ; $\|u_h^{(j)}\|$ для N_h -мерного вектора $u_h^{(j)}$; $\|u_h^{(j, q)}\|$ для $(N_h \cdot q)$ -мерного вектора, составляющими которого являются значения u_h в q слоях $S_{j-q+1}, S_{j-q+2}, \dots, S_j$; норму $\|u_h\|_{\Phi_h}$, согласованную с функциональными нормами в смысле (2.171). Предполагается, что для любой сеточной функции $u_h \in U_h^0$ эти нормы связаны неравенствами:

$$\|u_h\|_{U_h^0} \leq C_0 \max_j \|u_h^{(j)}\| \quad (0 \leq j \leq M_h - 1), \quad (2.173)$$

$$\|u_h^{(j)}\| \leq C_1 \|u_h^{(j, q)}\|, \quad (2.174)$$

$$\|u_h^{(q-1, q)}\| \leq C_2 \|u_h\|_{\Phi_h}, \quad (2.175)$$

где C_0, C_1, C_2 — положительные постоянные, не зависящие от h . В частности, если нормы векторов понимать как максимум модуля составляющих вектора, то эти неравенства выполняются для $C_0 = C_1 = C_2 = 1$.

Теорема 8. *Если существует неотрицательная постоянная C такая, что для любой $u_h \in U_h^0$ имеет место неравенство*

$$\|u_h^{(j, q)}\| \leq (1 + C\tau) \|u_h^{(j-1, q)}\|, \quad q \leq j \leq M_h - 1, \quad (2.176)$$

то сеточная схема (2.169), (2.170) устойчива, т. е. для всякой $u_h \in U_h^0$ имеет место неравенство (2.172).

Частный случай. Если $p = q = 1$, то норму $\|u_h^{(j, q)}\|$ считают совпадающей с $\|u_h^{(j)}\|$, и тогда (2.176) принимает вид

$$\|u_h^{(j)}\| \leq (1 + C\tau) \|u_h^{(j-1)}\|, \quad 1 \leq j \leq M_h - 1. \quad (2.177)$$

Пример 24. В прямоугольнике $\Delta(T)$ рассмотрим сеточное уравнение (2.150) $\left(h = \frac{1}{N}\right)$ для $(f)_k, j = 0$ при условиях $u_{0,j} = u_{N,j} = 0$ на полупрямых Γ_1 и Γ_2 . Если $g(x, t) \geq 0$ и $\tau \leq h^2 (2A + Gh^2)^{-1}$, то имеет место принцип максимума и корректность сеточной задачи и вместе с тем устойчивость по начальным условиям. Если $g(x, t)$ принимает и отрицательные значения в $\Delta(T)$, то сеточная система не удовлетворяет принципу максимума, но в этом случае при условии $r = \frac{\tau}{h^2} < \frac{1}{2A}$ имеет место устойчивость, так как очевидно, что справедливо (2.177), где $C = \|g(x, t)\|$. Можно доказать, что здесь имеет место и сходимость u_h к $u(x, t)$.

З а м е ч а н и е. В случае $p = q = 1$, решая однородные уравнения, соответствующие (2.169), (2.170), относительно $u_h^{(j)}$, получим

$$u_h^{(j)} = B_h^{(j)} u_h^{(j-1)},$$

где $B_h^{(j)}$ — квадратная матрица порядка N_h . Пусть норма матрицы выбрана согласованной [104] с нормой векторов. Тогда достаточным условием устойчивости будет

$$\|B_h^{(j)}\| \leq 1 + C\tau, \quad 1 \leq j \leq M_h - 1.$$

Если коэффициенты оператора L и граничных условий не зависят от t , то естественно коэффициенты сеточных уравнений (2.169), (2.170) выбрать не зависящими от j . В этом случае матрица $B_h^{(j)}$ не зависит от j и поэтому

$$u_h^{(j)} = (B_h)^j u_h^{(0)}.$$

Тогда необходимым и достаточным условием устойчивости является ограниченность норм совокупности матриц

$$\|(B_h)^j\| \quad (h \rightarrow 0, 1 \leq j \leq M_h - 1).$$

г) Индекс разностной схемы ([30]). Из предположения А о системе (2.169), (2.170) следует, что значение отдельной составляющей $(u_h^{(j)})_k$ вектора $u_h^{(j)}$ является линейной комбинацией значений u_h в слоях S_{j-1}, \dots, S_{j-q}

(предполагается $u_h \in U_h^0$), т. е.

$$(u_h^{(j)})_k = \sum_{\substack{x_\nu \in \omega_h \\ j-q \leq \mu \leq j-1}} C_{\mu, \nu}^{(k, j)} (u_h^{(\mu)})_\nu,$$

где $C_{\mu, \nu}^{(k, j)}$ — коэффициенты линейной комбинации. Величина

$$J = \max_{q \leq j \leq M_h - 1} \max_{x_k \in \omega_h} \sum_{\substack{x_\nu \in \omega_h \\ j-q \leq \mu \leq j-1}} |C_{\mu, \nu}^{(k, j)}|$$

называется *индексом разностной схемы*.

Если существует постоянная C , не зависящая от h , такая, что $J < 1 + Ct$, то на основании теоремы 8 разностная схема устойчива (нормы векторов — максимумы модулей составляющих).

д) Признаки устойчивости, полученные методом разделения переменных. Предположим, что коэффициенты оператора L (см. 2.166) и линейных комбинаций $\bar{l}_n \mu$ (см. (2.168)) не зависят от t . Тогда матрицы $A_h^{(j, m)}$ и векторы $a_h^{(j, n)}$ (см. (2.169) и (2.170)) естественно выбрать не зависящими от j ; в этом случае будем писать $A_h^{(m)}$ и $a_h^{(n)}$. Теперь все векторы $u_h^{(j)}$ ($j=0, 1, \dots$) должны удовлетворять условиям

$$(a_h^{(n)}, u_h^{(j)}) = 0 \quad (n=1, 2, \dots, s) \quad (2.178)$$

и, следовательно, принадлежат некоторому $(M_h - s)$ -мерному векторному подпространству V_h пространства N_h -мерных векторов.

Пусть $N_h - s$ узлов из ω_h считаются внутренними и s узлов — граничными. Предполагается, что вектор $v_h \in V_h$ однозначно определяется своими значениями во внутренних узлах. Предположим, что строки матриц $A_h^{(m)}$ отвечают внутренним узлам ω_h , т. е. $A_h^{(m)} u_h^{(j)}$ — вектор, составляющие которого суть значения некоторой сеточной функции во внутренних узлах ω_h . Такой вектор в силу сделанного предположения однозначно доопределяется до вектора из подпространства V_h . В этом смысле прямоугольные матрицы $A_h^{(m)}$ можно рассматривать как переводящие всякий вектор из V_h в вектор из V_h .

Предположение Б. В V_h можно ввести скалярное произведение так, чтобы в V_h существовал такой ортонормированный базис, каждый вектор которого является собственным вектором для каждой из матриц $A_h^{(m)}$.

Это скалярное произведение обозначим через $[v_h, v'_h]$, где v_h и v'_h — два вектора из V_h ; векторы базиса обозначим через $v_h^{(l)}$ ($l=1, 2, \dots, N_h-s$), а собственные числа матрицы $A_h^{(m)}$ — через $\varrho_h^{(m, l)}$. Тогда сеточная функция u_h , значение которой в слое S_j определяется равенством

$$u_h^{(j)} = \lambda^j v_h^{(l)},$$

где λ — некоторое число, удовлетворяет граничным условиям (2.178); u_h удовлетворяет однородному уравнению (2.169) тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{m=0}^q \varrho_h^{(m, l)} \lambda^{j-m} \equiv \lambda^{j-q} \sum_{m=0}^q \varrho_h^{(m, l)} \lambda^{q-m} = 0,$$

т. е. (считая $\lambda \neq 0$) уравнению

$$\varrho_h^{(0, l)} \lambda^q + \varrho_h^{(1, l)} \lambda^{q-1} + \dots + \varrho_h^{(q-1, l)} \lambda + \varrho_h^{(q, l)} = 0. \quad (2.179)$$

Обозначим через $\lambda_h^{(\mu, l)}$ ($\mu=1, 2, \dots, q$) корни уравнения (2.179) и назовем их *коэффициентами роста*. Введем нормы

$$\left. \begin{aligned} \|u_h^{(j)}\| &= \sqrt{[u_h^{(j)}, u_h^{(j)}]}, \\ \|u_h\|_{U_h^0} &= \max_{0 \leq j < M_h-1} \|u_h^{(j)}\| \end{aligned} \right\} \quad (2.180)$$

и в случае $p=1$

$$\|u_h\|_{\Phi_h} = \sqrt{\sum_{m=0}^{q-1} \|u_h^{(m)}\|^2}. \quad (2.181)$$

Теорема 9. *Для того чтобы сеточная задача была устойчива (в случае $p=1$) по нормам (2.180) и (2.181), необходимо и достаточно, чтобы существовала неотрицательная постоянная C такая, чтобы для $\mu=1, 2, \dots, q$ и $l=1, 2, \dots, N_h-s$ коэффициенты роста удовлетворяли неравенству*

$$\|\lambda_h^{(\mu, l)}\| \leq 1 + C\tau. \quad (2.182)$$

Замечание 1. Для случая $p > 1$ и специального выбора нормы $\|u_h\|_{\Phi_h}$ условия устойчивости изложены в [83]. В частности, стремление к единице верхней границы модулей коэффициентов роста является необходимым условием устойчивости. Это значит, что если при как угодно малых h среди коэффициентов роста найдутся такие, что $|\lambda_h^{(\mu, l)}| \geq 1 + \varepsilon$, где ε — малое фиксированное число, то сеточная задача не является устойчивой.

Замечание 2. В случае $p = 1$ условие

$$|\lambda_h^{(\mu, l)}| \leq 1 \quad (2.183)$$

является достаточным условием устойчивости. При условии (2.183) $\|u_h^{(j)}\|$ остается ограниченной для $j \rightarrow \infty$. Некоторые авторы [90], [112], определяя устойчивость как ограниченность $\|u_h^{(j)}\|$ при $j \rightarrow \infty$, принимают (2.183) как необходимое и достаточное условие устойчивости.

е) **Примеры.** В последующих примерах будут рассмотрены сеточные схемы для уравнения (2.146). В качестве аппроксимации для $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{k, j}$ будет применяться $\frac{1}{h^2} (u_{k-1, j} - 2u_{k, j} + u_{k+1, j})$. В качестве граничных условий рассмотрим такие:

$$\alpha) \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

$$\beta) \quad u \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0,$$

$$\gamma) \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0.$$

В качестве множества ω_h возьмем:

$$\alpha) \quad x_k = kh, \quad h = \frac{1}{N}, \quad 0 \leq k \leq N,$$

$$\beta) \quad x_k = kh, \quad h = \frac{1}{N + \frac{1}{2}}, \quad 0 \leq k \leq N + 1,$$

$$\gamma) \quad x_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)h, \quad h = \frac{1}{N}, \quad -1 \leq k \leq N.$$

Сеточными граничными условиями возьмем:

$$\alpha) \quad u_{0, j} = u_{N, j} = 0,$$

$$\beta) \quad u_{0, j} = 0, \quad u_{N+1, j} - u_{N, j} = 0,$$

$$\gamma) \quad u_{0, j} - u_{-1, j} = 0, \quad u_{N, j} - u_{N-1, j} = 0.$$

Сеточные функции $v_h^{(l)}(k)$:

$$\alpha) v_h^{(l)}(k) \equiv \sin\left(k \frac{\pi l}{N}\right) \quad (l=1, 2, \dots, N-1),$$

$$\beta) v_h^{(l)}(k) \equiv \sin\left(k \frac{\pi(2l+1)}{2N+1}\right) \quad (l=0, 1, \dots, N),$$

$$\gamma) v_h^{(l)}(k) \equiv \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi l}{N}\right) \quad (l=0, 1, \dots, N-1),$$

являются собственными функциями разностного оператора

$$(\delta_h^2 v)_k \equiv h^{-2}[v(k-1) - 2v(k) + v(k+1)],$$

причем

$$\alpha) \delta_h^2 v_h^{(l)} = \left(-\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi l}{2N}\right) v_h^{(l)},$$

$$\beta) \delta_h^2 v_h^{(l)} = \left(-\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi(2l+1)}{2(2N+1)}\right) v_h^{(l)},$$

$$\gamma) \delta_h^2 v_h^{(l)} = \left(-\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi l}{2N}\right) v_h^{(l)}.$$

Заметим, что в случаях α), β), γ) множители $\sin^2 \frac{\pi l}{2N}$, $\sin^2 \frac{\pi(2l+1)}{2(2N+1)}$, $\sin^2 \frac{\pi l}{2N}$ положительны (кроме случая $l=0$ для γ) и при изменении l в указанных для l пределах при $N \rightarrow \infty$ принимают значения, как угодно близкие к 0 и 1. Эти множители в последующем обозначим через $q_h^{(l)}$. В последующих примерах граничные условия могут быть любые из α), β), γ) и будем выписывать только сеточное уравнение, заменяющее уравнение (2.146) для внутренних точек сетки.

Пример 25. Рассмотрим однородное уравнение (2.164) (см. а)). Подставляя в (2.164) вместо $u_{k,j}$ выражение $\lambda^j v_h^{(l)}(k)$, найдем после сокращения на $\lambda^{j-1} v_h^{(l)}(k)$

$$\lambda^2 + 8r q_h^{(l)} \lambda - 1 = 0 \quad \left(r = \frac{\tau}{h^2}\right).$$

Свободный член этого квадратного уравнения отрицателен, и, следовательно, его корни вещественны, разных знаков и отрицательный корень по модулю превосходит единицу. Обозначим его через $\lambda_h^{(1,l)}$. Для фиксированного r для достаточно малых τ и h найдется такое l , что

$$|\lambda_h^{(1,l)}| > 1 + 4r,$$

и, следовательно, разностная схема с (2.164) неустойчива при $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$, $\frac{\tau}{h^2} = r \geq r_0 > 0$.

Пример 26 Рассмотрим семейство неявных схем (2.161). Подставляя в однородное уравнение (2.161) $\lambda^j v_h^{(l)}(k)$ вместо $u_{k,j}$, после сокращения на $\lambda^j v_h^{(l)}(k)$ получим

$$\lambda - 1 + 4r [\alpha \lambda + (1 - \alpha)] \varrho_h^{(l)} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda = 1 - \frac{4r \varrho_h^{(l)}}{1 + 4r \varrho_h^{(l)} \alpha},$$

и поэтому для $\alpha > 0$ имеем $\lambda < 1$. Если выполнено неравенство $2r(1 - 2\alpha) \leq 1$, то в силу $0 \leq \varrho_h^{(l)} \leq 1$ будем иметь $\lambda \geq -1$ и, следовательно, $|\lambda| \leq 1$. Отсюда следует, что схема (2.161) устойчива, если $2r(1 - 2\alpha) \leq 1$. В частности, если $\alpha \geq \frac{1}{2}$, то схема устойчива для любых $r > 0$, т. е. будет устойчивой при произвольном стремлении $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$. Если $\alpha < \frac{1}{2}$, то для устойчивости схемы необходимо и достаточно, чтобы $r = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2(1 - 2\alpha)}$. Заметим, что из принципа максимума (см. п. 2) для $0 \leq \alpha \leq 1$ было получено неравенство $r \leq \frac{1}{2(1 - \alpha)}$, обеспечивающее корректность и тем самым устойчивость в равномерной норме, а поэтому и в норме (2.180). Для $r = \frac{1}{6(1 - 2\alpha)}$ ($\alpha < \frac{1}{2}$) получается уравнение с хорошей аппроксимацией.

Пример 27. В случае $\alpha > 0$ схема (2.161) является неявной и для перехода к следующему слою требуется решать систему линейных уравнений. Уравнение (Дюфорт и Франкел, 1953 г.)

$$\frac{u_{k,j+1} - u_{k,j-1}}{2\tau} - \frac{u_{k+1,j} - u_{k,j+1} - u_{k,j-1} + u_{k-1,j}}{h^2} = 0 \quad (2.184)$$

приводит к явной схеме, устойчивой для произвольного стремления $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$. Действительно,

$$v_h^{(l)}(k+1) + v_h^{(l)}(k-1) = 2 \cos \mu_h^{(l)} \cdot v_h^{(l)}(k),$$

где $\mu_h^{(l)} = \frac{\pi l}{N}$ в случаях α) и γ), $\mu_h^{(l)} = \frac{\pi(2l+1)}{2N+1}$ в случае β). Поэтому после подстановки $\lambda^j v_h^{(l)}(k)$ в (2.184) вместо $u_{k,j}$ и после упрощений получим

$$\lambda^2 - 1 - 2r [\lambda \cdot 2 \cos \mu_h^{(l)} - (\lambda^2 + 1)] = 0$$

или

$$\lambda^2 - \frac{4r \cos \mu_h^{(l)}}{1+2r} \lambda - \frac{1-2r}{1+2r} = 0,$$

модули корней которого при любых значениях $r > 0$ и $\mu_h^{(l)}$ меньше единицы, и поэтому (2.184) устойчиво при произвольном стремлении $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$. Однако следует заметить, что уравнение (2.184) аппроксимирует уравнение (2.146) только тогда, когда $\frac{\tau}{h} \rightarrow 0$. Если $\frac{\tau}{h} = \sigma$ остается постоянной ($\sigma > 0$), то уравнение (2.184) аппроксимирует гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Поэтому при применении уравнения (2.184) для приближенного решения уравнения (2.146) сетку следует брать с достаточно малым $\sigma = \frac{\tau}{h}$. В книгах [81], [90] приведена таблица сеточных уравнений, аппроксимирующих уравнение (2.146), и условий устойчивости этих сеточных уравнений.

ж) Признак устойчивости для уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть а) коэффициенты оператора Lu постоянны, б) однородные граничные условия для $x=0$ и $x=1$ таковы, что искомое решение $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = 0 \quad (2.185)$$

может быть продолжено на всю полуплоскость ($-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$) так, чтобы новая функция была решением уравнения (2.185) и была периодической по x с некоторым периодом m , где m — целое положительное число.

Пусть для решения этой задачи применяется прямоугольная сетка

$$x_k = x^{(0)}(h) + kh, \quad t_j = j\tau$$

$$\left(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots; j=0, 1, 2, \dots; h = \frac{m}{N} \right)$$

и сеточное уравнение, заменяющее (2.185), имеет вид ($q=1$)

$$\sum_{v=-s}^s a_h^{(v)} u_{k+v, j} + \sum_{v=-s}^s b_h^{(v)} u_{k+v, j-1} = 0, \quad (2.186)$$

где s — некоторое целое положительное число, $a_h^{(v)}$ и $b_h^{(v)}$ — коэффициенты сеточного уравнения, зависящие от выбора τ и h , не зависящие от k и j . Граничные условия заменяются условием периодичности сеточного решения. Сеточные уравнения (2.186) имеют решения вида

$$v_h^{(l)}(k, j) = (\lambda_h^{(l)})^j e^{i \frac{2\pi l}{N} k}, \quad i = \sqrt{-1},$$

где l — произвольное целое число, $\lambda_h^{(l)}$ — постоянная, зависящая от выбора l (и выбора h и τ). Из уравнения (2.186) находим

$$\lambda_h^{(l)} = - \frac{\sum_{v=-s}^s b_h^{(v)} \xi^v}{\sum_{v=-s}^s a_h^{(v)} \xi^v} \quad \left(\xi = e^{i \frac{2\pi l}{N}} \right). \quad (2.187)$$

Если при $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ для каждого l имеет место неравенство

$$|\lambda_h^{(l)}| \leq 1 + C\tau, \quad (2.188)$$

то сеточная задача устойчива.

В книге [81] изложена теория устойчивости разностных уравнений для случая $q \geq 1$, аппроксимирующих уравнения вида (2.185). Изложенный здесь признак (2.188) является частным результатом упомянутой теории.

Отметим, что заключения в примерах 25, 26, 27 (см. е)) могут быть получены на основании этой теории.

Следующий пример таков, что не выполняется предположение Б, сделанное в д), и поэтому не проходит способ пункта е).

Пример 28. Асимметрическое сеточное уравнение [90]. Пусть ставится задача: найти решение уравнения (2.146) при граничных условиях $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$ и начальном условии $u|_{t=0} = \varphi(x)$. Нетрудно видеть, что если решение $u(x, t)$ этой задачи продолжить на $(-1 \leq x \leq 0, t \geq 0)$, полагая $u(x, t) = -u(-x, t)$, и затем продолжить периодически с периодом 2 по x на всю плоскость $t \geq 0$, то полученная функция $u(x, t)$ будет решением того же уравнения (2.146).

Пусть α — произвольное вещественное число. Для каждого внутреннего узла сетки $x_k = kh$, $t_j = j\tau$ $\left(h = \frac{1}{N}; k = 1, 2, \dots \right.$

... $N-1; j=1, 2, \dots$) запишем уравнение

$$(1+r\alpha) \frac{u_{k,j+1}-u_{k,j}}{\tau} - r\alpha \frac{u_{k-1,j+1}-u_{k-1,j}}{\tau} - \frac{u_{k+1,j}-2u_{k,j}+u_{k-1,j}}{h^2} = 0, \quad r = \frac{\tau}{h^2}, \quad (2.189)$$

аппроксимирующее уравнение (2.146) при $\frac{\tau}{h} \rightarrow 0$ с оценкой

$$\left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\| h^2 + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\| \tau + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\| \alpha \frac{\tau}{h}.$$

Несмотря на то, что уравнение (2.189) приводит к неявной схеме, вычисление $u_h^{(j+1)}$ осуществляется просто. Именно, из (2.189) при $(1+r\alpha) \neq 0$ однозначно определяется $u_{k,j+1}$, если известны $u_h^{(j)}$ и $u_{k-1,j+1}$. Но $u_{0,j+1} = 0$ в силу граничного условия, и поэтому последовательно вычисляются $u_{1,j+1}, u_{2,j+1}, \dots, u_{N-1,j+1}$, если известно $u_h^{(j)}$, затем полагается $u_{N,j+1} = 0$.

Из (2.189) имеем

$$[(1+r\alpha)u_{k,j+1} - r\alpha u_{k-1,j+1}] + [(2r-1-r\alpha)u_{k,j} - r(1-\alpha)u_{k-1,j} - r u_{k+1,j}] = 0$$

и, следовательно, на основании (2.187)

$$\lambda_h^{(l)} = \frac{r(1-\alpha)\zeta^{-1} + r\zeta - (2r-1-r\alpha)}{(1+r\alpha) - r\alpha\zeta^{-1}}, \quad \zeta = e^{i \frac{2\pi l}{N}} = e^{i\mu}.$$

В случае $\alpha=1$, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} |\lambda_h^{(l)}|^2 &= \frac{r\zeta + (1-r)}{(1+r) - r\zeta^{-1}} \frac{r\bar{\zeta} + (1-r)}{(1+r) - r\bar{\zeta}^{-1}} = \frac{r^2 + (1-r)^2 + 2r(1-r)\cos\mu}{r^2 + (1+r)^2 - 2r(1+r)\cos\mu} = \\ &= 1 - \frac{4r(1-\cos\mu)}{r^2 + (1+r)^2 - 2r(1+r)\cos\mu} \quad \left(\bar{\zeta} = e^{-i\mu} = \frac{1}{\zeta} \right), \end{aligned}$$

откуда следует $0 \leq |\lambda_h^{(l)}|^2 \leq 1$, и, таким образом, сеточная схема (2.189) для $\alpha=1$ устойчива при произвольном r . При применении схемы (2.189) все же следует помнить, что для наличия аппроксимации необходимо $\frac{\tau}{h} \rightarrow 0$, и поэтому при конкретных вычислениях следует τ брать малым по сравнению с h . Заметим, что при $\alpha=r=1$ схема (2.189) приводит к формуле

$$u_{k,j+1} = \frac{u_{k+1,j} + u_{k-1,j+1}}{2},$$

вычисления по которой весьма просты.

4. Примеры устойчивых разностных схем. а) Переменяющаяся схема. Для приближенного решения уравнения (2.146) при граничных условиях $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$ и начальном условии (2.136) были рассмотрены явная (2.147) и неявная (2.156) схемы. Явная схема устойчива лишь при $r = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$, но вычисление u_h на очередном слое S_j осуществляется просто; неявная схема устойчива при любых $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$, но для определения u_h на очередном слое S_j требуется решение системы линейных уравнений, например, методом прогонки, но не накладывается ограничений на отношение $\sigma = \frac{\tau}{h}$ ($\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$). Оказывается, что если вычисление $u_h^{(j)}$ для четного j (нечетного j) вести по явной схеме, а для нечетного j (четного j) — по неявной схеме, то в целом схема получается устойчивой. Действительно, решение сеточной задачи является суммой слагаемых вида

$$w_l(j) \sin k \frac{l\pi}{N} \quad (l = 1, 2, \dots, N-1).$$

При пользовании явной схемой при переходе от S_{j-1} к S_j имеем

$$\frac{w_l(j)}{w_l(j-1)} = 1 - 4rQ_h^{(l)} \quad \left(r = \frac{\tau}{h^2}, Q_h^{(l)} = \sin^2 \frac{\pi l}{2N} \right),$$

а при переходе от слоя S_j к слою S_{j+1} по неявной схеме имеем

$$\frac{w_l(j+1)}{w_l(j)} = \frac{1}{1 + 4rQ_h^{(l)}}.$$

Поэтому за спаренный шаг перехода от слоя S_{j-1} к слою S_j имеем

$$\left| \frac{w_l(j+1)}{w_l(j-1)} \right| = \left| \frac{1 - 4rQ_h^{(l)}}{1 + 4rQ_h^{(l)}} \right| < 1,$$

что обеспечивает устойчивость схемы при произвольном r ; устойчивость и аппроксимация имеют место при произвольном стремлении $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$.

В книге [90] изучено большое число разностных схем для решения уравнений параболического типа.

б) Устойчивые разностные схемы для $p=q=2$. Рассмотрим уравнение (2.166) для случая $p=2$. Если строить разностную схему (2.169) для случая $q=2$ и норму в Φ_h выбрать равной

$$\sqrt{[u_h^{(0)}, u_h^{(0)}] + \left[\frac{u_h^{(1)} - u_h^{(0)}}{\tau}, \frac{u_h^{(1)} - u_h^{(0)}}{\tau} \right]},$$

то можно указать следующее достаточное условие устойчивости. Если сеточная задача такова, что коэффициенты роста (см. п. 3, д)) $\lambda_h^{(\mu, l)}$ ($\mu=1, 2; l=1, 2, \dots, N_h-1$) представимы в виде $\lambda_h^{(1, l)} = e^{i\gamma_l}$, $\lambda_h^{(2, l)} = e^{-i\gamma_l}$, то сеточная задача устойчива, если $\cos \gamma_l \geq -1 + \nu$, где $\nu > 0$ — некоторое произвольное фиксированное число [83].

Пример 29. Для решения смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = \Phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x)$$

введем сетку $x_k = kh$, $t_j = j\tau$ ($h = \frac{1}{N}$; $k=0, 1, \dots, N$; $j=0, 1, 2, \dots$).

Рассмотрим семейство неявных схем

$$\frac{u_{k,j+1} - 2u_{k,j} + u_{k,j-1}}{\tau^2} - [\alpha \delta_h^2 u_h^{(j+1)} + (1 - \alpha - \beta) \delta_h^2 u_h^{(j)} + \beta \delta_h^2 u_h^{(j-1)}]_k = 0 \quad \left([\delta_h^2 u_h^{(j)}]_k = \frac{u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}}{h^2} \right),$$

$$u_{0,j} = u_{N,j} = 0, \quad u_{k,0} = \Phi(kh), \quad u_{k,1} = \Phi(kh) + \tau g(kh).$$

Выбирая $v_h^{(l)}(k) = \sin k \frac{\pi l}{N}$ ($l=1, 2, \dots, N-1$), легко находим следующее уравнение для $\lambda_h^{(\mu, l)}$:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4Q_h^{(l)} \sigma^2 [\alpha \lambda^2 + (1 - \alpha - \beta) \lambda + \beta] = 0$$

$$\left(Q_h^{(l)} = \sin^2 \frac{\pi l}{2N}, \quad \sigma = \frac{\tau}{h} \right),$$

т. е.

$$\lambda^2 - 2 \left[\frac{1 - 2Q_h^{(l)} \sigma^2 (1 - \alpha - \beta)}{1 + 4Q_h^{(l)} \sigma^2 \alpha} \right] \lambda + \frac{1 + 4Q_h^{(l)} \sigma^2 \beta}{1 + 4Q_h^{(l)} \sigma^2 \alpha} = 0.$$

Для $\alpha = \beta \geq 0$ и $Q_h^{(l)} \sigma^2 (1 - 4\alpha) \leq 1$ корни последнего квадратного уравнения имеют вид $e^{i\gamma_l}$ и $e^{-i\gamma_l}$, где

$$\cos \gamma_l = 1 - \frac{2Q_h^{(l)} \sigma^2}{1 + 4Q_h^{(l)} \sigma^2 \alpha} \geq 1 - \frac{2\sigma^2}{1 + 4\sigma^2 \alpha} = -1 + 2 \frac{1 + \sigma^2 (4\alpha - 1)}{1 + 4\sigma^2 \alpha}.$$

Поэтому для $\alpha > \frac{1}{4}$ схема будет устойчивой при произвольном $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$. Для $\alpha = \frac{1}{4}$ схема будет устойчивой при $\frac{\tau}{h} \leq \sigma_0$, где σ_0 — произвольное фиксированное число. Для $\alpha = 0$ схема является устойчивой при $\sigma < 1$, т. е. при $\frac{\tau}{h} \leq \sigma_0 < 1$; для $\alpha = 0$ и $\sigma = 1$ схема неустойчива [83].

Пример 30. Задача об упругих колебаниях стержня ставится так: в области $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$ найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (2.190)$$

удовлетворяющее начальным условиям (2.136), (2.137) и граничным условиям

$$u \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = u \Big|_{x=1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = 0. \quad (2.191)$$

(Можно рассматривать и другие граничные условия.)

Введем сетку $x_k = kh$, $t_j = j\tau$ ($h = \frac{1}{N}$; $k = -1, 0, \dots, N, N+1$; $j = 0, 1, 2, \dots$).

Сеточные граничные условия запишем в виде

$$u_0, j = u_N, j = 0, \quad u_{-1, j} + u_{1, j} = 0, \quad u_{N-1, j} + u_{N+1, j} = 0. \quad (2.192)$$

Введем оператор

$$\delta_h^4 u_h^{(j)} \equiv \frac{1}{h^4} (u_{k+2, j} - 4u_{k+1, j} + 6u_{k, j} - 4u_{k-1, j} + u_{k-2, j}).$$

Тогда уравнение

$$\frac{u_{k, j+1} - 2u_{k, j} + u_{k, j-1}}{\tau^2} + \left\{ \alpha \delta_h^4 u_h^{(j+1)} + (1 - \alpha - \beta) \delta_h^4 u_h^{(j)} + \beta \delta_h^4 u_h^{(j-1)} \right\} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N-1; j = 1, 2, \dots)$$

при $0 \leq \alpha$, $0 \leq \beta$, $\alpha + \beta \leq 1$ аппроксимирует уравнение (2.190). Нетрудно видеть, что сеточные функции $v_h^{(l)}(k) = \sin \frac{\pi k l}{N}$ удовлетворяют граничным условиям (2.192) и являются собственными

функциями оператора δ_h^4 с собственными значениями $\frac{16}{h^4} \sin^4 \frac{\pi l}{2N}$.

Поэтому коэффициенты роста $\lambda_h^{(\mu, l)}$ удовлетворяют уравнению

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 16r^2 [\alpha\lambda^2 + (1 - \alpha - \beta)\lambda + \beta] c_h^{(l)} = 0$$

$$\left(r = \frac{\tau}{h^2}, c_h^{(l)} = \sin^4 \frac{\pi l}{2N} \right),$$

т. е.

$$\lambda^2 - 2 \frac{1 - 8c_h^{(l)} r^2 (1 - \alpha - \beta)}{1 + 16\alpha c_h^{(l)} r^2} \lambda + \frac{1 + 16c_h^{(l)} r^2 \beta}{1 + 16c_h^{(l)} r^2 \alpha} = 0.$$

Для $\alpha = \beta \geq 0$, $4c_h^{(l)} r^2 (1 - 4\alpha) \leq 1$ корни уравнения представимы в виде $e^{i\gamma_l}$ и $e^{-i\gamma_l}$, где

$$\cos \gamma_l = 1 - \frac{8c_h^{(l)} r^2}{1 + 16c_h^{(l)} r^2 \alpha} \geq 1 - \frac{8r^2}{1 + 16r^2 \alpha} = -1 + 2 \frac{1 + 4r^2 (4\alpha - 1)}{1 + 16r^2 \alpha}.$$

Поэтому для $\alpha > \frac{1}{4}$ схема будет устойчивой при произвольном стремлении $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$; для $\alpha = \frac{1}{4}$ схема будет устойчивой при $\frac{\tau}{h^2} \leq r_0$, где r_0 — произвольное фиксированное число; для $\alpha = 0$ схема является устойчивой при $\frac{\tau}{h^2} \leq r_0 < \frac{1}{2}$.

§ 3. Нелинейные задачи

Среди нелинейных задач для уравнений гиперболического и параболического типов имеются такие, в которых заранее неизвестна область существования решения, а поэтому невозможно и назначить сетку для приближенного решения задачи.

В первых двух пунктах этого параграфа изложены сеточные методы решения некоторых задач такого типа.

1. Квазилинейные гиперболические системы. Рассмотрим систему двух квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно двух функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial x} + b_{11} \frac{\partial u}{\partial y} + b_{12} \frac{\partial v}{\partial y} &= f_1, \\ a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial x} + b_{21} \frac{\partial u}{\partial y} + b_{22} \frac{\partial v}{\partial y} &= f_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.193)$$

где $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, f_i ($i, j = 1, 2$) — функции переменных x, y, u, v , определенные для всех значений $-\infty < x, y, u, v < \infty$. Вводя векторы $X(x, y)$, $U(u, v)$, $F(f_1, f_2)$ и матрицы A и B с элементами $a_{i,j}$ и $b_{i,j}$, систему (2.193) запишем в виде

$$A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = F. \quad (2.194)$$

Определитель матрицы $A\alpha - B\beta$, где α и β — числа, является квадратичной формой $Q(\alpha, \beta)$ относительно α, β .

Система (2.193) называется *гиперболической* для (X_0, U_0) , если для $X = X_0$, $U = U_0$ квадратичная форма $Q(\alpha, \beta)$ разлагается на вещественные линейные множители:

$$Q(\alpha, \beta) \equiv (\mu_1\alpha - \nu_1\beta)(\mu_2\alpha - \nu_2\beta),$$

причем векторы (μ_1, ν_1) и (μ_2, ν_2) не коллинеарны. Для краткости будем говорить, что $Q(\alpha, \beta)$ линейно разложима. Два направления на плоскости Oxy , определяемые векторами (μ_1, ν_1) и (μ_2, ν_2) , называются *характеристическими* для (X_0, U_0) . Пусть $U(x, y)$ — некоторая векторная функция $U\{u(x, y), v(x, y)\}$. Тогда в каждой точке плоскости Oxy определена квадратичная форма $Q(\alpha, \beta)$, и пусть в каждой точке некоторой области Ω эта форма линейно разложима и, следовательно, с каждой точкой этой области связаны два характеристических направления. *Характеристикой* называется кривая плоскости Oxy , касательная к которой в каждой точке имеет характеристическое направление.

Если предположить $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ достаточно гладкими функциями от X, U , то каждая достаточно гладкая вектор-функция $U(x, y)$ порождает два семейства характеристик в области Ω линейной разложимости квадратичной формы $Q(\alpha, \beta)$ (если такая область существует).

Пусть теперь $U(x, y)$ является решением системы (2.193) и Ω — область линейной разложимости квадратичной формы $Q(\alpha, \beta)$ для этого решения. Пусть для некоторого участка какой-либо характеристики касательная не параллельна оси Oy , т. е. для всех точек участка $\mu \neq 0$. Тогда доказывается, что вдоль участка

$$\frac{dy}{dx} = \varrho, \quad (2.195)$$

где q — один из корней квадратного уравнения

$$|Aq - B| = \begin{vmatrix} a_{11}q - b_{11} & a_{12}q - b_{12} \\ a_{21}q - b_{21} & a_{22}q - b_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (2.196)$$

а $\frac{du}{dx}$ и $\frac{dv}{dx}$ связаны соотношением

$$\begin{vmatrix} a_{11} \frac{du}{dx} + a_{12} \frac{dv}{dx} - f_1 & a_{12}q - b_{12} \\ a_{21} \frac{du}{dx} + a_{22} \frac{dv}{dx} - f_2 & a_{22}q - b_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

которое после умножения на dx можно записать в виде

$$M du + N dv + P dx = 0, \quad (2.197)$$

где

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}q - b_{12} \\ a_{21} & a_{22}q - b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} q - \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

$$N = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12}q - b_{12} \\ a_{22} & a_{22}q - b_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & b_{12} \\ a_{22} & b_{22} \end{vmatrix},$$

$$P = \begin{vmatrix} -f_1 & a_{12}q - b_{12} \\ -f_2 & a_{22}q - b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & b_{12} \\ f_2 & b_{22} \end{vmatrix} - q \begin{vmatrix} f_1 & a_{12} \\ f_2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Предположим, что $\mu_1 \neq 0$ и $\mu_2 \neq 0$ в Ω , т. е. характеристики нигде не параллельны оси Oy . Тогда в каждой точке области Ω оба корня уравнения (2.196) конечны; будем их нумеровать так, что $q_1 < q_2$. Первым семейством характеристик будем считать то, для которого имеет место (2.195) с заменой q на q_1 , вторым семейством — то, для которого q в (2.195) заменено на q_2 .

Пусть теперь заданы две точки X_1 и X_2 плоскости Oxy , не лежащие на одной характеристике и достаточно близкие друг к другу, и пусть известны значения u_1, v_1 и u_2, v_2 функций u, v в этих точках. Пусть требуется найти точку X_3 пересечения характеристики первого семейства, проходящей через X_1 , и характеристики второго семейства, проходящей через X_2 , и значения u_3, v_3 функций u, v в X_3 .

Для приближенного решения этой задачи можно поступить так. В точке X_1 известны значения u, v и, следовательно, известны корни $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}$ уравнения (2.196). Аналогично для точки X_2 известны корни $q_1^{(2)}$ и $q_2^{(2)}$ уравнения (2.196).

Заменяя в (2.195) $\frac{dy}{dx}$ на характеристиках через $\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$ и $\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$, получим следующие два уравнения для приближенного вычисления координат точки X_3 :

$$y_3 - y_1 = Q_1^{(1)}(x_3 - x_1), \quad y_3 - y_2 = Q_2^{(2)}(x_3 - x_2). \quad (2.198)$$

Для приближенного вычисления значений u_3, v_3 воспользуемся уравнениями, полученными из (2.197) заменой du и dv на $u_3 - u_1, v_3 - v_1$ и $u_3 - u_2, v_3 - v_2$ соответственно для первой и второй характеристик, а именно:

$$\left. \begin{aligned} M_1^{(1)}(u_3 - u_1) + N_1^{(1)}(v_3 - v_1) + P_1^{(1)}(x_3 - x_1) &= 0, \\ M_2^{(2)}(u_3 - u_2) + N_2^{(2)}(v_3 - v_2) + P_2^{(2)}(x_3 - x_2) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.199)$$

где $M_i^{(j)}, N_i^{(j)}, P_i^{(j)}$ ($i, j = 1, 2$) — значения функций M, N, P для $x = x_i, y = y_i, u = u_i, v = v_i, Q = Q_i^{(j)}$. Таким образом, определение x_3, y_3, u_3, v_3 требует решения двух систем линейных уравнений с двумя неизвестными x_3, y_3 и u_3, v_3 в каждой.

Так найденные x_3, y_3, u_3, v_3 , вообще говоря, являются грубыми приближениями к искомым величинам. Предложены различные способы уточнения этих значений ([2], [76], [116]); часть этих способов является итеративными, а найденные из уравнений (2.198) и (2.199) значения x_3, y_3, u_3, v_3 служат начальными приближениями процесса итераций. Например, шаг итерации для одного из способов таков. По x_3, y_3, u_3, v_3 находят $Q_1^{(s)}, Q_2^{(s)}$ и в (2.198) заменяют $Q_1^{(1)}$ и $Q_2^{(2)}$ на $\tilde{Q}_1 = \frac{1}{2}(Q_1^{(1)} + Q_1^{(s)})$ и $\tilde{Q}_2 = \frac{1}{2}(Q_2^{(2)} + Q_2^{(s)})$ соответственно; из полученной системы находят x'_3, y'_3 .

Затем в уравнениях (2.199) заменяют $x_3 - x_1$ и $x_3 - x_2$ на $x'_3 - x_1$ и $x'_3 - x_2$, а $M_1^{(1)}, N_1^{(1)}, \dots, P_2^{(2)}$ на $\frac{1}{2}(M_1^{(1)} + M_1^{(s)}), \frac{1}{2}(N_1^{(1)} + N_1^{(s)}), \dots, \frac{1}{2}(P_2^{(2)} + P_2^{(s)})$ соответственно ($M_i^{(j)}, \dots$ означает значение M, \dots для $x_j, y_j, u_j, v_j, Q_i^{(j)}$). Решая так измененную систему (2.199), получают u'_3, v'_3 , на чем и кончается один шаг итерации.

Если величины $|x'_3 - x_3|, |y'_3 - y_3|, |u'_3 - u_3|, |v'_3 - v_3|$ нельзя признать малыми, то процесс уточнения продолжают и находят $x''_3, y''_3, u''_3, v''_3$ по x'_3, y'_3, u'_3, v'_3 так же, как последние были найдены по x_3, y_3, u_3, v_3 .

Описанный здесь прием определения (x_3, y_3, u_3, v_3) по данным (x_1, y_1, u_1, v_1) , (x_2, y_2, u_2, v_2) применяется для приближенного решения ряда граничных задач для системы (2.193). Этот прием будем называть элементарным шагом.

Задача Коши. Для системы (2.193) задача Коши ставится следующим образом. Пусть в плоскости Oxy задана линия C ($x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$) и в точках C заданы значения \tilde{U} вектора $U\{u = \tilde{u}(\tau), v = \tilde{v}(\tau)\}$. Требуется найти в некоторой окрестности линии C вектор-функцию $U\{u(x, y), v(x, y)\}$, являющуюся решением системы (2.193) и совпадающую с \tilde{U} на C .

Поскольку в каждой точке линии C известны (x, y, u, v) , то в каждой точке известна квадратичная форма $Q(\alpha, \beta)$.

Предположение 1. Линия C и заданный на ней вектор \tilde{U} таковы, что система (2.193) является гиперболической в каждой точке линии C . (При некоторых дополнительных предположениях это означает, что корни q_1 и q_2 уравнения (2.196) вещественны и различны.)

Предположение 2. Линия C не является характеристикой, т. е. в каждой точке линии

$$\frac{dy}{dx} \neq q_1, \quad \frac{dy}{dx} \neq q_2.$$

Для приближенного решения задачи Коши выберем на линии C несколько точек X_1, X_2, \dots, X_k , занумерованных в порядке следования на кривой C и таких, что соседние точки X_i, X_{i+1} достаточно близки. Тогда, применяя элементарный шаг, найдем по

значения $(x_i, y_i, u_i, v_i), (x_{i+1}, y_{i+1}, u_{i+1}, v_{i+1})$

$$(x_i^{(1)}, y_i^{(1)}, u_i^{(1)}, v_i^{(1)}) \quad (i = 1, 2, \dots, k-1).$$

Применяя элементарный шаг к точкам

$$(x_i^{(1)}, y_i^{(1)}, u_i^{(1)}, v_i^{(1)}), \quad (x_{i+1}^{(1)}, y_{i+1}^{(1)}, u_{i+1}^{(1)}, v_{i+1}^{(1)}) \\ (i = 1, 2, \dots, k-2),$$

найдем

$$(x_i^{(2)}, y_i^{(2)}, u_i^{(2)}, v_i^{(2)}) \quad (i = 1, 2, \dots, k-2)$$

и после k шагов таких вычислений придем к единственной точке

$$(x_1^{(k-1)}, y_1^{(k-1)}, u_1^{(k-1)}, v_1^{(k-1)}).$$

В результате такого решения получается таблица координат точек $X_i^{(j)}$ ($j=1, 2, \dots, k-1$; $i=1, 2, \dots, k-j$) и соответствующих значений $U_i^{(j)}$ (рис. 13). Может случиться,

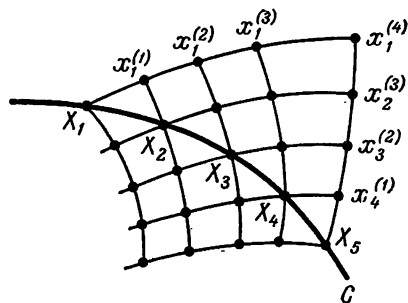


Рис. 13.

что этот процесс вычислений придется прекратить, если корни уравнения (2.196) для некоторых значений $X_i^{(j)}$, $U_i^{(j)}$ окажутся комплексными (квадратичная форма $Q(\alpha, \beta)$ не будет линейно разложимой).

Для того чтобы найти аналогичную таблицу для приближенного решения по другую сторону линии C , надо поменять ролями q_1 и

q_2 , т. е. через точку X_i проводить характеристику второго семейства (q_2), а через точку X_{i+1} характеристику первого семейства (q_1).

Задача Гурса. Заданы две линии C_1 и C_2 , имеющие общую точку A , и значения \tilde{U}_1 и \tilde{U}_2 вектора U на C_1 и C_2 , совпадающие в точке A . На каждой из линий выполнено предположение 1 (система (2.193) гиперболическая на C_1 для \tilde{U}_1 и на C_2 для \tilde{U}_2), и, кроме того, $\frac{dy}{dx} = q_1$ на C_1 , а $\frac{dy}{dx} = q_2$ на C_2 (т. е. линии C_1 и C_2 являются характеристиками соответственно первого и второго семейства). Требуется найти решение $U(x, y)$ системы (2.193) в окрестности точки A , совпадающее с \tilde{U}_1 и \tilde{U}_2 на C_1 и C_2 соответственно.

Для приближенного решения задачи Гурса выберем на линиях C_1 и C_2 точки X_1, X_2, \dots, X_k и Y_1, Y_2, \dots, Y_l соответственно, где X_1 и Y_1 — ближайшие к A точки на C_1 и C_2 .

Применяя элементарный шаг к X_1, Y_1 и данным в них значениям \tilde{U} , находим точку A_1 и $U(A_1)$. Пусть X_2 — бли-

жайшая к X_1 точка на C_1 . Применяя элементарный шаг к X_2 и A_1 , найдем A_2 и $U(A_2)$ и т. д.

После kl элементарных шагов будут найдены приближенные значения точек A_i ($i=1, 2, \dots, kl$) и функции $u(A_i)$, $v(A_i)$ (рис. 14).

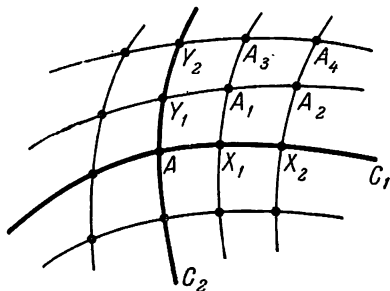


Рис. 14.

2. Параболическое уравнение; задача с подвижной границей (модифицированная однослойная задача Стефана). Задача ставится так: ищутся неотрицательные функции $x = \xi(t)$, ($t \geq 0$, $\xi(0) = a > 0$) и функция $u(x, t)$, удовлетворяющая в области $0 \leq x \leq \xi(t)$, $t \geq 0$, уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.200)$$

и на границе ее условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -1, \quad (2.201)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq a), \quad (2.202)$$

$$u(\xi(t), t) = 0, \quad (2.203)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = \frac{d\xi}{dt}, \quad (2.204)$$

причем относительно функции $\varphi(x)$ предполагается

$$\varphi(x) > 0 \quad (0 \leq x < a), \quad \varphi'(0) = -1, \quad \varphi(a) = 0. \quad (2.205)$$

Нетрудно убедиться, что если решение задачи существует, то оно неотрицательно, и поэтому в силу (2.203) $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi} \leq 0$ и, следовательно, в силу (2.204) имеем $\frac{d\xi}{dt} \geq 0$, т. е. $\xi(t)$ — неубывающая функция.

Пусть $h = \frac{a}{N}$, где N — положительное целое число, и в последующем будем считать $x_k = kh$. Пусть t_n означает такое значение t , что $\xi(t_n) = x_{N+n}$.

Если бы функция $x = \xi(t)$ была известной, то были бы известны значения t_n , и тогда для определения сеточной функции $u_{k,n}$, заменяющей $u(x, t)$, естественно написать следующие сеточные уравнения, в которых $\tau_n = t_{n+1} - t_n$:

$$\frac{u_{k,n+1} - u_{k,n}}{\tau_n} - \frac{u_{k+1,n+1} - 2u_{k,n+1} + u_{k-1,n+1}}{h^2} = 0 \quad (2.206)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, \dots, N + n),$$

$$u_{0,n+1} - u_{1,n+1} = h \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.207)$$

$$u_{k,0} = \varphi(kh), \quad (2.208)$$

$$u_{N+n+1,n+1} = 0, \quad (2.209)$$

заменяющие соответственно уравнения (2.200) — (2.203). Если известно τ_n и значения $u_{k,n}$ ($k = 0, 1, \dots, N + n$), то $u_{k,n+1}$ определяется единственным образом из (2.206), (2.207), (2.209). Для определения τ_n можно было бы воспользоваться, например, таким уравнением:

$$\left. \frac{d\xi}{dt} \right|_{t=t_n} \approx \frac{h}{\tau_n} = \frac{u_{N+n-1,n}}{h} \approx - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\xi(t_n)},$$

заменяющим уравнение (2.204). Из последнего уравнения следует

$$\tau_n = \frac{h^2}{u_{N+n-1,n}},$$

и сеточная задача однозначно разрешима (если $u_{N+n-1,n} > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$), так как $u_{k,0}$ известна из (2.208). Такой способ вычисления τ_n , по-видимому, очень груб, и можно предложить другой метод учета условия (2.204).

Именно, для решения задачи (2.200), (2.201), (2.202), (2.203), (2.204) имеет место следующая формула:

$$\xi(t) = t - \int_0^{\xi(t)} u(x, t) dx + a + \int_0^a \varphi(x) dx,$$

которая для $t = t_{n+1} = t_n + \tau_n$ принимает вид

$$(N + n + 1)h = t_n + \tau_n - \int_0^{(N+n+1)h} u(x, t_{n+1}) dx + a + \int_0^a \varphi(x) dx.$$

Положим, заменяя приближенно интеграл суммой,

$$\tau_n = \left[n + 1 + \sum_{k=0}^{N+n} u_{k,n+1} \right] h - \int_0^a \varphi(x) dx - t_n. \quad (2.210)$$

Если считать, что $u_{k,n}$ и t_n уже найдены, то для определения τ_n и $u_{k,n+1}$ служит система уравнений (2.206), (2.207), (2.209), (2.210), которую можно решать методом итераций, один шаг которых таков: если $\tau_n^{(0)}$ выбрано, то из системы (2.206), (2.207), (2.209) находится $u_{k,n+1}^{(0)}$; затем из формулы (2.210) находится $\tau_n^{(1)}$.

В работе [115] доказана сходимость такого процесса итераций и сходимость сеточного решения к точному при $h \rightarrow 0$.

3. Задача Дирихле для слабо нелинейного эллиптического уравнения [111]. Пусть Ω — конечная область плоскости Oxy , ограниченная контуром Γ . Пусть $F(x, y, z, p, q)$ — функция, определенная для $(x, y) \in \Omega$, $-\infty < z, p, q < \infty$, непрерывная, частные производные первого порядка которой по z, p, q существуют и удовлетворяют условиям

$$F'_z \geq 0, \quad |F'_p| \leq A, \quad |F'_q| \leq A. \quad (2.211)$$

где A — некоторое положительное число.

Задача Дирихле для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (2.212)$$

ставится так: в области $\Omega + \Gamma$ найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (2.212) и граничному условию

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (2.213)$$

где $\varphi(x, y)$ — заданная на Γ функция.

Если задача имеет решение, то в силу $F'_z \geq 0$ это решение единственно.

Для приближенного решения задачи (2.212), (2.213) применим квадратную сетку с шагом h , удовлетворяющим неравенству $Ah < 2$.

Пусть Ω_h —совокупность всех узлов сетки, лежащих внутри Ω или на границе Γ ; Ω_h^0 и Ω_h^1 —множества внутренних и граничных (в смысле пятиточечной звезды) узлов; N_h и N_h^0 —число узлов в Ω_h и Ω_h^0 . Занумеруем все узлы в Ω_h^0 числами от 1 до N_h^0 и в Ω_h числами от $N_h^0 + 1$ до N_h .

Для звезды с центром во внутреннем узле X_j через $j(1), j(2), j(3), j(4)$ обозначим номера отличных от центра узлов звезды. Для каждого внутреннего узла $X_j(x_j, y_j)$ напишем сеточное уравнение

$$\frac{\sum_{k=1}^4 u_{j(k)} - 4u_j}{h^2} - F\left(x_j, y_j, u_j, \frac{u_{j(1)} - u_{j(3)}}{2h}, \frac{u_{j(2)} - u_{j(4)}}{2h}\right) = 0 \quad (2.214)$$

$$(j = 1, 2, \dots, N_h^0)$$

и для каждого граничного узла

$$u_j = \varphi(Q_j) \quad (j = N_h^0 + 1, \dots, N_h), \quad (2.215)$$

где Q_j —ближайшая к X_j точка границы Γ .

Доказано, что система уравнений (2.214), (2.215) имеет единственное решение (при условии (2.211) и $Ah < 2$).

Если $u(x, y) \in C^4$, где $u(x, y)$ —решение задачи (2.212), (2.213), то имеет место оценка

$$\|u_h - u(x, y)\| \leq N(2M^{(3)} + M^{(4)})h^2 + M^{(1)}h,$$

где N —некоторая положительная постоянная, зависящая от A и диаметра области Ω . Отсюда следует равномерная сходимость сеточного решения u_h к точному решению $u(x, y) \in C^4$. Если же $u(x, y) \in \overline{C^4}$, то относительно сходимости u_h к $u(x, y)$ остаются в силе утверждения, сделанные для линейной задачи Дирихле (см. утверждения 4), 5) из § 1, п. 4, а)).

Для решения сеточной задачи (2.214), (2.215) предлагается следующий итерационный метод. Уравнение

$$z + \frac{h^2}{4} F(x, y, z, p, q) = S \quad (2.216)$$

в силу $F'_z \geq 0$ имеет единственное решение относительно z

при любых фиксированных $(x, y) \in \Omega$, $-\infty < p, q < \infty$.
Пусть

$$z = \Psi_h(x, y, S, p, q)$$

— это решение.

Уравнение (2.214) перепишем в виде

$$\frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 u_{j(k)} = u_j + \frac{h^2}{4} F \left(x_j, y_j, u_j, \frac{u_{j(1)} - u_{j(s)}}{2h}, \frac{u_{j(2)} - u_{j(4)}}{2h} \right),$$

откуда следует, что сеточная функция u_h удовлетворяет в каждом внутреннем узле (x_j, y_j) уравнению (2.214) тогда и только тогда, когда в этом узле имеет место равенство

$$u_j = \Psi_h \left(x_j, y_j, \frac{\sum_{k=1}^4 u_{j(k)}}{4}, \frac{u_{j(1)} - u_{j(s)}}{2h}, \frac{u_{j(2)} - u_{j(4)}}{2h} \right),$$

которое перепишем в виде

$$u_j = \Phi_h(x_j, y_j, u_{j(1)}, u_{j(2)}, u_{j(3)}, u_{j(4)}). \quad (2.217)$$

Пусть $u_h^{(0)}$ — какая-либо сеточная функция, удовлетворяющая условию (2.215). Тогда строится последовательность сеточных функций $u_h^{(m)}$, значения которых в граничных узлах определяются из (2.215), а во внутренних узлах определяются так:

$$u_j^{(m)} = \Phi_h(x_j, y_j, u_{j(1)}^{(m-1)}, u_{j(2)}^{(m-1)}, u_{j(3)}^{(m-1)}, u_{j(4)}^{(m-1)}) \quad (2.218)$$

$$(j = 1, 2, \dots, N_h^0).$$

Этот процесс итерации сходится, если выполнено условие $F'_z \geq \eta > 0$ (η — как угодно малое положительное число), более жесткое, чем предположение $F'_z \geq 0$. Процесс итерации по формуле (2.218) есть аналог простой итерации для системы линейных уравнений.

Обозначим через $\tilde{u}_{j(k)}^{(m-1)}$ величину $u_{j(k)}^{(m)}$, если $j(k) < j$, и через $u_{j(k)}^{(m-1)}$ для $j(k) > j$. Тогда процесс итерации

$$u_j^{(m)} = \Phi_h(x_j, y_j, \tilde{u}_{j(1)}^{(m-1)}, \tilde{u}_{j(2)}^{(m-1)}, \tilde{u}_{j(3)}^{(m-1)}, \tilde{u}_{j(4)}^{(m-1)}) \quad (2.219)$$

$$(j = 1, 2, \dots, N_h^0)$$

является аналогом итерации Зейделя для линейных систем. Процесс (2.219) также сходящийся (при условии $F'_z \geq \eta > 0$).

После нескольких циклов вычислений по формулам (2.218) (или (2.219)) процесс обрывается, и результат последнего цикла принимается в качестве приближенного решения системы (2.217), (2.215), равносильной системе (2.214), (2.215).

Рассмотрим один шаг вычисления по формуле (2.218). Пусть (x_j, y_j) — некоторый внутренний узел, и пусть заданы значения $u_{j(1)}, u_{j(2)}, u_{j(3)}, u_{j(4)}$ сеточной функции в соседних для (x_j, y_j) узлах. Тогда известны значения

$$p_j = \frac{u_{j(1)} - u_{j(3)}}{2h}, \quad q_j = \frac{u_{j(2)} - u_{j(4)}}{2h}, \quad S_j = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 u_{j(k)}$$

и остается решить уравнение (2.216). Для этого, по-видимому, целесообразно воспользоваться методом итерации по формуле

$$z^{(l)} = S_j - \frac{h^2}{4} F(x_j, y_j, z^{(l-1)}, p_j, q_j) \quad (2.220)$$

$$(l = 1, 2, \dots; z^{(0)} = S_j).$$

Этот процесс итерации будет сходящимся, если F'_z ограничена сверху величиной B и $\frac{h^2}{4} B < 1$. При этом точное решение уравнения (2.216) лежит между двумя последовательными приближениями $z^{(l-1)}, z^{(l)}$. После нескольких шагов вычислений по формуле (2.220) процесс обрывают и результат последнего вычисления принимают в качестве приближенного значения правой части (2.218) (или (2.220)).

Эти результаты переносятся на случай уравнений, получающихся из (2.212) заменой $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ на

$$Lu \equiv a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2e(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (ab - e^2 > 0)$$

при условии, что уравнение $Lu = f$ можно аппроксимировать уравнениями вида (2.50), образующими вместе с граничными сеточными уравнениями систему, удовлетворяющую принципу максимума.

НЕКОТОРЫЕ ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Систематическое изложение метода сеток в целом или его разделов содержится в книгах: [2], [25], [30], [75], [81], [83], [90], [116], а также в статьях [34] и [35]. В книге [75] приведено много численных примеров применения метода сеток для решения основных задач математической физики.

Основные понятия (нормы в функциональных и векторных пространствах, согласование этих норм, корректность и устойчивость сеточной задачи и т. д.) впервые систематически изложены в книге [83]. Некоторые из этих понятий, относящиеся к применению метода сеток к основным уравнениям математической физики, изложены в книге [77].

Вопросы аппроксимации, разрешимости, оценки погрешности для эллиптических сеточных задач Дирихле, удовлетворяющих принципу максимума, изложены в [2], [25], [30], [54], [75], [116].

Для сеточных уравнений, заменяющих задачу Дирихле в случае самосопряженных (и близких к ним) эллиптических уравнений, вопросы разрешимости, корректности и сходимости изложены в [35] (см. также в [34], [38]).

Обсуждение достоинств и недостатков отдельных методов решения линейных эллиптических сеточных систем уравнений содержится в книгах [90] и [116].

В методе сеточных уравнений, заменяющих смешанные задачи для гиперболических и параболических уравнений, большое внимание в последнее время уделяется вопросам устойчивости соответствующих разностных схем. Изложение этих вопросов содержится в книгах [17], [81], [83], [90], [116] (см. также [25], [30]). Изложенные в книге [17] новые признаки устойчивости не нашли отражения в главе II этого сборника *СМБ*.

Весьма полное изложение различных сторон метода сеток и обширная библиография содержатся в книге [116].

Отметим цикл работ [85]—[88], [101]—[103] по вопросам устойчивости, сходимости и оценки погрешности разностных схем, аппроксимирующих уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и соответствующие эллиптические уравнения. В главе II настоящей книги такие вопросы не освещены.

ГЛАВА III

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

§ 1. Положительные операторы и энергия

1. Оператор краевой задачи. Всякая краевая задача математической физики может быть сведена к уравнению вида

$$Au = f, \tag{3.1}$$

где u — искомый элемент некоторого функционального пространства¹⁾, A — данный оператор и f — данный элемент того же или иного функционального пространства. Оператор A будем называть *оператором данной краевой задачи*.

Пример 1. Поставим задачу Дирихле. Пусть требуется в некоторой области Ω , ограниченной поверхностью S , определить функцию $u(x)$ (x — переменная точка), которая внутри области удовлетворяет уравнению Пуассона — $\Delta u = f(x)$, где Δ — оператор Лапласа, а на границе S — краевому условию $u|_S = 0$.

Допустим, как это часто бывает, что $f(x)$ непрерывна в области Ω и квадратично суммируема в ней, и потребуем, чтобы искомая функция $u(x)$ была непрерывна в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + S$, а ее первые и вторые производные были непрерывны и квадратично суммируемы в открытой области²⁾ Ω . Тогда u и f можно рассматривать как элементы — искомый и данный — гильбертова пространства функций, квадратично

¹⁾ Необходимые сведения о функциональных пространствах, в частности о гильбертовом пространстве, можно найти, например, в книгах [13], [24], [63], [95].

²⁾ Мы оставляем здесь в стороне вопрос о том, можно ли всегда удовлетворить сформулированным в тексте требованиям.

суммируемых в области Ω ; оператор A можно в данном случае определить как взятый с обратным знаком оператор Лапласа, заданный на функциях, которые непрерывны в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + S$, в открытой области Ω дважды непрерывно дифференцируемы, имеют квадратично суммируемые в Ω лапласиан и обращаются в нуль на границе S .

Пример 2. Поставим ту же задачу, что и в примере 1. Введем новую неизвестную $v = \text{grad } u$. Тогда искомую вектор-функцию v можно рассматривать как элемент гильбертова пространства, образованного градиентами функций, обращающихся в нуль на границе S ; данную функцию $f(x)$ можно по-прежнему рассматривать как элемент гильбертова пространства функций, квадратично суммируемых в Ω . Так как $\Delta u = \text{div grad } u = \text{div } v$, то уравнение

$$-\Delta u = f(x)$$

принимает вид

$$-\text{div } v = f(x).$$

Под оператором A следует в данном случае понимать оператор дивергенции, взятый с обратным знаком.

В задачах теории упругости или гидродинамики искомый элемент u может представлять собой ту или иную совокупность функций (вектор смещений или скоростей, тензор напряжений, деформаций, скоростей деформаций и т. д.). То же относится и к данному элементу f .

Краевая задача может быть линейной или нелинейной; соответственно будет линейным или нелинейным оператор A .

Во всей главе, за исключением § 10, будут рассмотрены только линейные задачи и линейные операторы. Это обстоятельство особо оговариваться не будет.

Будём также считать (если не будет оговорено противное), что данный элемент f и искомый элемент u принадлежат одному и тому же вещественному гильбертову пространству.

2. Положительные и положительно определенные операторы. Симметричный оператор A , действующий в некотором гильбертовом пространстве, называется *положительным*, если для любого элемента из области определения оператора справедливо неравенство

$$(Au, u) \geq 0,$$

причем знак равенства имеет место только тогда, когда $u=0$, т. е. когда u — нулевой элемент пространства.

Если A — положительный оператор, то скалярное произведение (Au, u) называется *энергией* элемента u по отношению к оператору A . Эта терминология оправдана тем, что во всех случаях, когда элемент u можно трактовать как смещение некоторой системы, величина (Au, u) совпадает, при подходящем выборе единиц измерения, с потенциальной энергией деформации этой системы.

Теорема 1. *Если оператор A положителен, то уравнение (3.1) имеет не более одного решения.*

Симметричный оператор A называется *положительно определенным*, если существует такая положительная постоянная γ^2 , что для любого элемента u из области определения оператора A справедливо неравенство

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2. \quad (3.2)$$

Пример 3. Рассмотрим весьма элементарную краевую задачу об определении функции $u(x)$, которая удовлетворяет внутри отрезка $0 \leq x \leq 1$ дифференциальному уравнению $-u'' = f(x)$, а на концах этого отрезка — краевым условиям $u(0) = u(1) = 0$.

В гильбертовом пространстве $L_2(0, 1)$ функций, квадратично суммируемых на отрезке $0 \leq x \leq 1$, наша задача порождает оператор $A = -\frac{d^2}{dx^2}$, за область определения которого здесь естественно

принять множество функций, непрерывных вместе со своими первыми и вторыми производными на отрезке $0 \leq x \leq 1$ и обращающихся в нуль на концах этого отрезка. Интегрирование по частям с учетом краевых условий дает (u и v — функции из области определения оператора A)

$$(Au, v) = - \int_0^1 vu'' dx = -vu' \Big|_0^1 + \int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 u'v' dx;$$

в частности, при $v = u$

$$(Au, u) = \int_0^1 u'^2 dx.$$

Из первой формулы вытекает симметричность, из второй — положительность оператора A . Далее имеем

$$u(x) = u(x) - u(0) = \int_0^x u'(t) dt$$

и, по неравенству Буняковского,

$$u^2(x) \leq x \int_0^x u'^2(t) dt \leq \int_0^1 u'^2(t) dt.$$

Интегрируя это по x в пределах от нуля до единицы, легко найдем, что $(Au, u) \geq \|u\|^2$; оператор A положительно определенный, и можно в нашем примере принять $\gamma^2 = 1$.

Существуют операторы положительные, но не положительно определенные. В этом можно убедиться на следующем примере. Обозначим через B оператор $-\frac{d^2}{dx^2}$, но определенный на функциях, заданных на бесконечном промежутке $(0, \infty)$. Примем, что эти функции непрерывны и имеют непрерывные первые и вторые производные при $x \geq 0$, отличны от нуля только на некотором конечном промежутке (своем для каждой функции) и обращаются в нуль при $x=0$. Из легко доказываемых формул

$$(Bu, v) = \int_0^{\infty} u'v' dx, \quad (Bu, u) = \int_0^{\infty} u'^2 dx$$

вытекает симметричность и положительность оператора B , который, однако, не является положительно определенным. Последнее вытекает из того, что для функции

$$u_n(x) = \begin{cases} x(n-x)^2, & 0 \leq x \leq n, \\ 0 & x > n, \end{cases}$$

удовлетворяющей всем перечисленным выше условиям, отношение

$$\frac{(Bu_n, u_n)}{\|u_n\|^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

может быть сделано сколь угодно малым при достаточно большом n .

Понятия положительного и положительно определенного операторов допускают следующую физическую трактовку.

Будем рассматривать u как смещение некоторой системы. Тогда положительность оператора означает, что невозможно сообщить системе смещение, не затратив на это некоторой энергии. Если оценивать величину смещения его нормой, то положительная определенность оператора означает, что системе можно сообщить большое смещение, только затратив достаточно большую энергию. Если же оператор положительный, но не положительно определенный, то системе можно сообщить сколь угодно большое по норме смещение, затратив на это сколь угодно малую энергию.

3. Энергетическое пространство. Со всяким положительным (в частности, со всяким положительно определенным) оператором можно связать особое гильбертово пространство,

которое мы будем называть *энергетическим пространством*. Пусть A — положительный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве H , и пусть $M = D(A)$ — область определения этого оператора. Введем на M новое скалярное произведение (которое будем обозначать квадратными скобками): если u и v элементы M , то положим

$$[u, v] = (Au, v). \quad (3.3)$$

Величину $[u, v]$ назовем *энергетическим произведением* элементов u и v . Доказывается, что энергетическое произведение удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения.

Раз на множестве M введено новое скалярное произведение, это множество стало гильбертовым пространством. В общем случае оно неполное — пополним его. Построенное таким образом новое гильбертово пространство назовем *энергетическим пространством* и обозначим через H_A .

Норму в энергетическом пространстве назовем *энергетической нормой* и будем обозначать символом $|u|$. Для элементов области M определения оператора A энергетическая норма определяется формулой

$$|u| = \sqrt{(Au, u)}. \quad (3.4)$$

Сходимость в энергетическом пространстве называется *сходимостью по энергии*.

Важную роль играет вопрос о природе тех элементов, которые служат для пополнения энергетического пространства. Если оператор A положительно определенный, то имеет место теорема, в силу которой все элементы пространства H_A принадлежат также исходному гильбертову пространству H ; если u — элемент пространства H_A , то имеет место неравенство

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma} |u|, \quad (3.5)$$

где символ $\| \cdot \|$ означает норму в исходном пространстве H , а γ — постоянная, входящая в неравенство (3.2).

Если A — положительно определенный оператор, то из сходимости некоторой последовательности по энергии вытекает также ее сходимость в норме исходного пространства: если $u_n \in H_A$, $u \in H_A$ и $|u_n - u| \rightarrow 0$, то и $\|u_n - u\| \rightarrow 0$.

4. Обобщенные производные. Пусть Ω — некоторая конечная область t -мерного пространства и S — ее граница. *Пограничной полосой области Ω* называется совокупность тех ее точек, расстояния которых до границы S не превосходят некоторого заданного числа δ ; это число называется *шириной* пограничной полосы.

Область Ω' называется *подобластью Ω* , если все точки Ω' принадлежат Ω , и *внутренней подобластью*, если Ω содержит не только все точки области Ω' , но и все точки ее границы, иначе говоря, если существует пограничная полоса области Ω , не содержащая точек подобласти Ω' .

Обозначим через Φ_k множество функций, k раз непрерывно дифференцируемых в Ω и обращающихся в нуль в пограничной полосе (своей для каждой функции) этой области.

Допустим сперва, что функция $u(x)$ имеет в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + S$ непрерывную производную

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}};$$

одновременно она имеет и все предшествующие этой производные, также непрерывные в $\bar{\Omega}$. Пусть $\varphi(x)$ — любая функция множества Φ_k . На поверхности S функция $\varphi(x)$ и все ее производные обращаются в нуль, поэтому интегрирование по частям приводит к формуле

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} dx = (-1)^k \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} dx.$$

Пусть теперь $u(x)$ — некоторая функция, суммируемая в любой внутренней подобласти Ω , и пусть существует такая функция $w(x)$, также суммируемая в любой внутренней подобласти Ω , что для любой функции $\varphi(x) \in \Phi_k$ справедливо тождество

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} dx = (-1)^k \int_{\Omega} \varphi w dx.$$

Тогда $w(x)$ называется *обобщенной производной порядка k по переменным $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ от функции $u(x)$ в области Ω* . Обозначается обобщенная производная обычным

СИМВОЛОМ

$$\omega(x) = \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}. \quad (3.6)$$

Пример 4. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — две суммируемые, но недифференцируемые функции переменной t , скажем, в промежутке $0 \leq t \leq 1$. Тогда функция

$$u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2),$$

суммируемая в квадрате Ω плоскости (x_1, x_2) , определяемом неравенствами $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$, имеет в этом квадрате вторую обобщенную производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$ и эта производная тождественно равна нулю.

Действительно, пусть $\varphi(x) \in \Phi_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx &= \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(x_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \int_0^1 \int_0^1 g(x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 = \\ &= \int_0^1 f(x_1) dx_1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 + \int_0^1 g(x_2) dx_2 \int_0^1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 = 0 = \int_{\Omega} 0 \cdot \varphi dx. \end{aligned}$$

Из только что разобранных примеров видно, что функция, имеющая обобщенную производную порядка $k > 1$, может не иметь предшествующих обобщенных производных; в нашем примере функция $u(x_1, x_2)$ не имеет обобщенных первых производных.

Теорема 2. Если в области Ω функции $u_r(x)$ ($r = 1, 2, \dots, n$) имеют обобщенные производные одного и того же вида

$$\omega_r(x) = \frac{\partial^k u_r}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$$

и если c_r ($r = 1, 2, \dots, n$) — постоянные, то функция $\sum_{r=1}^n c_r u_r(x)$ имеет обобщенную производную того же вида, причем

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \sum_{r=1}^n c_r u_r(x) = \sum_{r=1}^n c_r \omega_r(x).$$

Теорема 3. Пусть Ω' — подобласть Ω . Если $w(x)$ есть некоторая обобщенная производная от $u(x)$ в Ω , то $w(x)$ есть такая же обобщенная производная от $u(x)$ в Ω' .

Теорема 4. Если в области Ω функция $v(x)$ есть обобщенная производная от $u(x)$ порядка k по $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$:

$$v(x) = \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}},$$

а функция $w(x)$ есть производная от $v(x)$ порядка l по $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}$:

$$w(x) = \frac{\partial^l v}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_l}},$$

то $w(x)$ есть обобщенная производная от $u(x)$ вида

$$w(x) = \frac{\partial^{k+l} u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k} \partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_l}}$$

в той же области Ω .

Теорема 5. Пусть $u_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) — последовательность функций, определенных почти всюду в области Ω и суммируемых в этой области с некоторой степенью $p > 1$, и пусть существуют обобщенные производные

$$w_n(x) = \frac{\partial^k u_n}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}},$$

суммируемые в Ω с некоторой степенью $q > 1$. Если при этом в любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$ функции $u_n(x)$ слабо сходятся к некоторой функции $u(x)$ в $L_p(\Omega')$, а функции $w_n(x)$ слабо сходятся в $L_q(\Omega')$ к некоторой функции $w(x)$, то предельная функция $u(x)$ имеет в Ω обобщенную производную

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$$

и эта производная равна $w(x)$.

Можно дать другое определение обобщенной производной, равносильное приведенному выше. Пусть $u(x)$ и $w(x)$ суммируемы в любой внутренней подобласти Ω' области Ω .

Функция $w(x)$ называется *обобщенной производной* вида (3.6) от $u(x)$, если существует последовательность k раз непрерывно дифференцируемых внутри Ω функций $u_n(x)$ таких, что $u_n \rightarrow u$ и

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \rightarrow w$$

в смысле метрики пространства $L(\Omega')$, иначе говоря, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} |u_n(x) - u(x)| dx = 0$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} \left| \frac{\partial^k u_n}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} - w(x) \right| dx = 0;$$

через Ω' обозначена любая внутренняя подобласть области Ω .

5. Теоремы вложения. Область называется *звездной* относительно данной точки, если любой луч, исходящий из этой точки, только один раз пересекается с границей области. Так, например, всякая выпуклая область звездна относительно любой своей точки.

Здесь и ниже будут рассматриваться только конечные области, которые можно представить в виде суммы конечного числа взаимно налегающих подобластей, каждая из которых — звездная относительно любой точки некоторого шара.

Теорема 6. Пусть функция $u(x)$ суммируема в области Ω и имеет всевозможные обобщенные производные некоторого порядка $k > 1$, также суммируемые в Ω . Тогда $u(x)$ имеет суммируемые в Ω всевозможные обобщенные производные порядков, меньших k .

Пространство $W_p^{(l)}(\Omega)$ С. Л. Соболева, где $p > 1$, состоит из функций, которые имеют в Ω всевозможные обобщенные производные порядка l , причем как сами функции, так и их производные порядка l суммируемы в Ω со степенью p ; норма в этом пространстве задается формулой

$$\|u\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |u|^p dx + \int_{\Omega} \sum \left| \frac{\partial^l u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_l}} \right|^p dx, \quad (3.7)$$

где сумма распространена на всевозможные наборы равных или не равных между собой чисел i_1, i_2, \dots, i_l , каждое из которых не превосходит числа m — размерности области Ω .

Теорема 7. Если $u(x) \in W_p^{(l)}(\Omega)$ и $pl > m$, то $u(x)$ эквивалентна функции, непрерывной в замкнутой области $\bar{\Omega}$. Имеет место неравенство

$$\|u\|_{C(\Omega)} \leq M \|u\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}, \quad (3.8)$$

где $C(\Omega)$ обозначает пространство функций, непрерывных в замкнутой области $\bar{\Omega}$, а M — постоянная, которая не зависит от функции $u(x)$. Всякое множество, ограниченное в $W_p^{(l)}(\Omega)$, компактно в $C(\Omega)$.

Следствие. Если $u(x) \in W_p^{(l)}(\Omega)$ и натуральное число k таково, что $p(l-k) > m$, то $u(x) \in C^{(k)}(\Omega)$ ¹⁾, при этом

$$\|u\|_{C^{(k)}(\Omega)} \leq M \|u\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}$$

и всякое множество, ограниченное в $W_p^{(l)}(\Omega)$, компактно в $C^{(k)}(\Omega)$.

Теорема 8. Пусть Γ_s , $s \leq m$, — достаточно гладкое многообразие, все точки которого принадлежат Ω . Если $pl \leq m$ и $s > m - pl$, то всякая функция $u(x) \in W_p^{(l)}(\Omega)$ эквивалентна функции, которая определена почти всюду на Γ_s и суммируема на Γ_s с любой степенью q , удовлетворяющей неравенству

$$q \leq \frac{ps}{m - pl}; \quad (3.9)$$

при этом имеет место неравенство

$$\|u\|_{L_q(\Gamma_s)} \leq M_1 \|u\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}, \quad (3.10)$$

где постоянная M_1 не зависит от функции $u(x)$. Если q удовлетворяет строгому неравенству

$$q < \frac{ps}{m - pl}, \quad (3.11)$$

¹⁾ То есть производные порядка k от $u(x)$ непрерывны в $\bar{\Omega}$.

то множество, ограниченное в $W_p^{(l)}(\Omega)$, компактно в $L_q(\Gamma_s)$.

Следствие. Если $u \in W_p^{(l)}(\Omega)$ и $k < l$, то

$$u \in W_q^{(l-k)}(\Omega),$$

где

$$q \leq \frac{mp}{m-p(l-k)}, \quad (3.12)$$

и справедливо неравенство

$$\|u\|_{W_q^{(l-k)}} \leq M_2 \|u\|_{W_p^{(l)}}, \quad (3.13)$$

где постоянная M_2 не зависит от функции $u(x)$.

Теорема 9. Пусть N —число линейно независимых полиномов степени $\leq l-1$ от m переменных x_1, x_2, \dots, x_m . Пусть линейные ограниченные в $W_p^{(l)}(\Omega)$ функционалы $l_j u$ ($j=1, 2, \dots, n$) таковы, что они не обращаются одновременно в нуль ни на одном полиноме степени $\leq l-1$. Тогда норма, определяемая формулой

$$\|u\|^p = \sum_{j=1}^N |l_j u|^p + \int_{\Omega} \sum \left| \frac{\partial^l u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_l}} \right|^p dx, \quad (3.14)$$

эквивалентна норме (3.7).

Отметим два наиболее простых и важных неравенства, вытекающих из теорем вложения.

1°. Неравенство Пуанкаре. Если $u(x) \in W_2^{(1)}(\Omega)$, то

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq A \int_{\Omega} (\text{grad } u)^2 dx + A' \left(\int_{\Omega} u dx \right)^2. \quad (3.15)$$

2°. Если $u(x) \in W_2^{(1)}(\Omega)$ и $u=0$ на части границы S , то

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq B \int_{\Omega} (\text{grad } u)^2 dx. \quad (3.16)$$

Если $u=0$ на всей границе S , то неравенство (3.16) называют *неравенством Фридрихса*. В неравенствах (3.15) и (3.16) A, A', B —постоянные, которые не зависят от выбора функций $u(x)$, но зависят от выбора области Ω .

§ 2. Энергетический метод

1. Функционал энергетического метода. Если оператор A положителен, то решение уравнения (3.1) можно свести к решению некоторой вариационной задачи, как это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 10. Пусть A — положительный оператор. Если уравнение $Au = f$ имеет решение, то это решение сообщает функционалу

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f) \quad (3.17)$$

наименьшее значение. Обратно, если существует элемент, реализующий минимум функционала (3.17), то этот элемент удовлетворяет уравнению $Au = f$.

Метод решения краевых задач, состоящий в замене уравнения (3.1) задачей о минимуме функционала (3.17), носит в литературе название *энергетического метода*. Функционал (3.17) будем называть *функционалом энергетического метода*.

Теорема 10 не дает указаний ни на условия существования решения вариационной задачи, ни на то, как такое решение можно строить. Такие указания могут быть даны, если оператор краевой задачи положительно определен. В этом случае введем в рассмотрение энергетическое пространство H_A . По формуле (3.4) $(Au, u) = |u|^2$. Далее, по неравенству Коши—Буняковского и неравенству (3.5) $|(u, f)| \leq \|f\| \|u\| \leq \frac{\|f\|}{\gamma} |u|$. Это означает, что линейный функционал (u, f) ограничен в H_A ; по теореме Риса существует элемент $u_0 \in H_A$ такой, что $(u, f) = [u, u_0]$, если только $u \in H_A$. Теперь функционал (3.17) приводится к виду

$$\begin{aligned} F(u) &= |u|^2 - 2(u, f) = |u|^2 - 2[u, u_0] = \\ &= |u - u_0|^2 - |u_0|^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Из формулы (3.18) вытекают два простых и важных следствия: 1) эта формула позволяет определить функционал $F(u)$ не только на элементах области определения оператора A , но и на всех элементах энергетического пространства H_A ; 2) в пространстве H_A функционал $F(u)$ достигает минимума при $u = u_0$.

Если $u_0 \in D(A)$, то по теореме 10 u_0 есть решение уравнения $Au = f$; однако энергетическое пространство H_A , вообще говоря, шире, чем $D(A)$, и может случиться, что элемент u_0 , построенный по теореме Риса и реализующий в энергетическом пространстве минимум функционала $F(u)$, не попадет в $D(A)$. В этом случае можно рассматривать u_0 как обобщенное решение уравнения $Au = f$.

В связи с понятием обобщенного решения находится возможность *расширения* положительно определенного оператора. Пусть A — такой оператор. Каждому элементу f данного гильбертова пространства H приведем в соответствие тот элемент $u_0 \in H_A$, который реализует минимум функционала $F(u)$ в энергетическом пространстве; это соответствие порождает некоторый оператор G такой, что $Gf = u_0$. Доказывается, что *существует обратный оператор* $\hat{A} = G^{-1}$, который является самосопряженным расширением оператора A ; обобщенное решение уравнения $Au = f$ есть обычное решение уравнения $\hat{A}u = f$.

2. Построение решения вариационной задачи. Здесь мы укажем два общих приема построения элемента u_0 , реализующего минимум функционала $F(u)$; весьма важный метод Ритца, являющийся конкретизацией каждого из упомянутых выше методов, будет изложен в п. 3.

1) Допустим, что в пространстве H_A существует полная ортонормированная (в смысле метрики этого пространства) счетная система ¹⁾ ω_n ($n = 1, 2, \dots$), так что

$$[\omega_n, \omega_k] = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Тогда

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n) \omega_n. \quad (3.19)$$

Ряд (3.19) представляет собой ряд Фурье (в энергетическом пространстве) элемента u_0 по ортонормированной системе $\{\omega_n\}$; этот ряд сходится как в метрике пространства H_A (т. е. по энергии), так и в метрике пространства H .

Пример 5. Рассмотрим упругий стержень *прямоугольного* сечения, ограниченного прямыми $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$. Задача

¹⁾ Иначе говоря, мы допускаем, что пространство H_A сепарабельно; для этого достаточно, чтобы исходное пространство H было сепарабельным.

о кручении такого стержня легко сводится к интегрированию уравнения

$$-\Delta u = 1 \quad (3.20)$$

при краевых условиях

$$u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 0, \quad (3.21)$$

выражающих, что искомая функция обращается в нуль на контуре сечения. В нашем случае оператор A краевой задачи можно определить как оператор $-\Delta$, заданный на функциях, которые дважды, скажем, непрерывно дифференцируемы в области сечения, а на его границе обращаются в нуль¹⁾; исходным гильбертовым пространством H здесь является пространство функций, квадратично суммируемых в области сечения. Можно доказать, что этот оператор положительно определен; энергетическое произведение в нашем случае выражается формулой

$$[u, v] = - \int_0^a \int_0^b v(x, y) \Delta u(x, y) dx dy;$$

интегрированием по частям можно этой формуле придать симметричный вид:

$$[u, v] = \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy.$$

Пространство H_A состоит из функций, которые имеют квадратично суммируемые в прямоугольнике сечения, обобщенные первые производные и обращаются в нуль на контуре сечения; из теоремы, упомянутой в п. 3 § 1, а также из теоремы 8 вытекает, что функции, входящие в H_A , квадратично суммируемы в области сечения.

Полную ортонормированную систему в H_A образуют, например, функции

$$\omega_{kn}(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{ab}{b^2 k^2 + a^2 n^2}} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ (k, n = 1, 2, \dots);$$

формула (3.19) дает решение задачи о кручении стержня прямоугольного сечения:

$$u(x, y) = \frac{16 a^2 b^2}{\pi^4} \sum_{k, n=1, 3, 5 \dots} \frac{\sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{kn (b^2 k^2 + a^2 n^2)}.$$

¹⁾ Требование непрерывности вторых производных можно заменить более слабым требованием, чтобы эти производные существовали как обобщенные и были квадратично суммируемы в прямоугольнике сечения.

этой системы пригодны все методы, применяемые для решения систем линейных алгебраических уравнений с положительно определенной матрицей. Методы эти подробно изложены в книге [104]; здесь мы остановимся только на методе итераций.

Матрицу системы (3.24) обозначим через R_n , вектор, составленный из неизвестных a_1, a_2, \dots, a_n , — через a , вектор, составленный из свободных членов $(f, \varphi_1), (f, \varphi_2), \dots, (f, \varphi_n)$, — через b . Систему (3.24) можно записать как одно векторное уравнение:

$$R_n a = b. \quad (3.26)$$

Уравнение (3.26), очевидно, равносильно следующему:

$$a = (I - \alpha R_n) a + \alpha b, \quad (3.27)$$

где I — единичная матрица n -го порядка и α — любое не равное нулю число. Собственные числа $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$ матрицы R_n все положительны; расположим их в порядке возрастания:

$$0 < \lambda_1^{(n)} \leq \lambda_2^{(n)} \leq \dots \leq \lambda_n^{(n)}.$$

Собственные числа матрицы $I - \alpha R_n$ равны $1 - \alpha \lambda_k^{(n)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$); если взять

$$\alpha = \frac{2}{\lambda_1^{(n)} + \lambda_n^{(n)}}, \quad (3.28)$$

то все собственные числа матрицы $I - \alpha R_n$ будут заключены между числами

$$-\frac{\lambda_n^{(n)} - \lambda_1^{(n)}}{\lambda_n^{(n)} + \lambda_1^{(n)}} \quad \text{и} \quad +\frac{\lambda_n^{(n)} - \lambda_1^{(n)}}{\lambda_n^{(n)} + \lambda_1^{(n)}}$$

и, следовательно, будут все меньше единицы по абсолютной величине; итерации, выполняемые по формуле

$$a^{(k+1)} = \left(I - \frac{2}{\lambda_1^{(n)} + \lambda_n^{(n)}} R_n \right) a^{(k)} + \frac{2}{\lambda_1^{(n)} + \lambda_n^{(n)}} b, \quad (3.29)$$

сходятся к решению системы Рунге со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой равен

$$\frac{\lambda_n^{(n)} - \lambda_1^{(n)}}{\lambda_n^{(n)} + \lambda_1^{(n)}} = \frac{T_n - 1}{T_n + 1}, \quad (3.30)$$

где $T_n = \frac{\lambda_n^{(n)}}{\lambda_1^{(n)}}$ есть число обусловленности Тодта матрицы R_n .

Если n возрастает, то $\lambda_1^{(n)}$ не возрастает, а $\lambda_n^{(n)}$ не убывает. Может случиться, что имеет место хотя бы одно из соотношений

$$\lambda_1^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \lambda_n^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty;$$

тогда величина (3.30) стремится к единице при $n \rightarrow \infty$. В таком случае при больших n , нужных для того, чтобы приближение по Рунге было достаточно точным, итерации будут сходиться очень медленно. Поэтому практически особенно интересен тот случай, когда все собственные числа матрицы R_n заключены между двумя положительными постоянными, которые не зависят от n :

$$0 < c_1 \leq \lambda_k^{(n)} \leq c_2 < \infty; \quad (3.31)$$

в пп. 2—4 § 8 настоящей главы будет указано, как следует выбирать координатную систему, чтобы соотношение (3.31) имело место. В этом случае можно взять

$$\alpha = \frac{2}{c_1 + c_2}. \quad (3.32)$$

Собственные числа матрицы $I - \alpha R_n$ заключены тогда между числами

$$-\frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} \quad \text{и} \quad +\frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1};$$

итерации, выполняемые по формуле

$$a^{(k+1)} = \left(I - \frac{2}{c_1 + c_2} R_n \right) a^{(k)} + \frac{2}{c_1 + c_2} b, \quad (3.33)$$

сходятся при любом n , как прогрессия с знаменателем

$$\frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}. \quad (3.34)$$

5. Естественные краевые условия. Во многих практически интересных случаях оператор A краевой задачи представляет собой дифференциальный оператор, а его область определения есть множество функций, имеющих производные необходимого порядка и, что в данный момент для нас более существенно, удовлетворяющих некоторым *однородным* краевым условиям. Соответствующее пространство H_A получается из области $D(A)$ определения оператора A присоединением к ней новых функций, которые могут и не подчиняться всем тем требованиям, которые были наложены на функции из области $D(A)$. В частности, функции из H_A могут не удовлетворять тем или иным краевым условиям задачи. Краевое условие, которому удовлетворяют все функции, входящие в область задания положительного оператора A , называется *естественным* для этого оператора (или для соответствующей краевой задачи), если в энергетическом пространстве H_A существуют функции, этому условию не удовлетворяющие. Краевые условия, которым обязательно удовлетворяют элементы энергетического пространства, называются *главными*. В теории упругости главные краевые условия принято называть *геометрическими* или *кинематическими*, естественные краевые условия — *динамическими*.

Координатные функции в методе Ритца нет необходимости брать из области определения оператора, достаточно, чтобы они были элементами энергетического пространства. Отсюда вытекает, что *нет необходимости подчинять координатные функции естественным краевым условиям*; это существенно облегчает подбор координатных функций.

Можно указать простое правило, позволяющее отличать естественные краевые условия от главных и пригодное для весьма широкого класса краевых задач. Пусть оператор A дифференциальный, порядка $2s$, положительный на множестве функций, удовлетворяющих некоторым однородным краевым условиям вида $G_k u = 0$. Такое краевое условие будет естественным, если $G_k u$ содержит производные от u порядка s и выше, и главным, если $G_k u$ не содержит производных от u порядка выше $s - 1$.

Пример 6. Для оператора Лапласа $s = 1$; краевое условие задачи Дирихле $u|_S = 0$ главное, а краевое условие смешанной задачи $\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \right]_S = 0$, $\sigma \geq 0$, естественное.

Пример 7. Для бигармонического оператора

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4},$$

входящего в уравнение изгиба тонких пластин, $s=2$. Условия жесткого закрепления края (ν —внешняя нормаль к краю)

$$u|_S = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_S = 0$$

для этого оператора главные, а из условий свободного опирания края (σ —постоянная Пуассона, ρ —радиус кривизны края)

$$u|_S = 0, \quad \left[\Delta u - \frac{1-\sigma}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_S = 0$$

первое главное, а второе естественное.

Пример 8. Уравнения статической теории упругости в самом общем случае неоднородной и неанізотропной среды можно записать в виде

$$A\mathbf{u} \equiv - \sum_{i, k, l, m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (c_{iklm} \varepsilon_{lm}(\mathbf{u}) x_k^{(0)}) = \mathbf{K}. \quad (3.35)$$

Здесь \mathbf{u} —вектор упругих смещений, \mathbf{K} —вектор объемных сил, $\mathbf{x}_k^{(0)}$ —вектор координатной оси x_k ,

$$\varepsilon_{lm}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right),$$

коэффициенты упругости c_{iklm} удовлетворяют известным условиям симметрии

$$c_{iklm} = c_{lmi k} = c_{kilm}.$$

Для уравнения (3.35) $s=1$. Условие жесткого закрепления границы тела $\mathbf{u}|_S = 0$ главное; условие, что граница тела свободна от действия внешних сил, может быть представлено в виде

$$\sum_{i, k, l, m=1}^3 c_{iklm} \varepsilon_{lm}(\mathbf{u}) \cos(\nu, x_i) x_k^{(0)} = 0,$$

и очевидно, что оно естественное.

6. Неоднородные краевые условия. Энергетический метод можно часто использовать и в том случае, когда краевые условия данной задачи неоднородные. Поясним это на двух конкретных краевых задачах.

1) Рассмотрим уравнение Пуассона $-\Delta u = f(x)$ при краевом условии $u|_S = g(x)$; ограниченную поверхность S область, внутри которой мы ищем функцию $u(x)$, обозначим через Ω . Примем пока следующее допущение: существует функция $\psi(x) \in W_2^{(2)}(\Omega)$ такая, что $\psi|_S = g(x)$. Положим $v = u - \psi$. Функция $v(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $-\Delta v = f(x) - \Delta\psi$ и краевому условию $v|_S = 0$. В качестве исходного гильбертова пространства возьмем пространство $L_2(\Omega)$ функций, квадратично суммируемых в Ω . В этом пространстве оператор $-\Delta$ положительно определен на множестве функций, которые обращаются в нуль на границе S , и функцию $v(x)$ можно строить как решение задачи о минимуме функционала

$$\begin{aligned} F(v) &= -(\Delta v, v) - 2(v, f - \Delta\psi) = \\ &= -\int_{\Omega} [v\Delta v + 2v(f - \Delta\psi)] dx = \\ &= \int_{\Omega} [(grad v)^2 - 2v(f - \Delta\psi)] dx; \quad (3.36) \end{aligned}$$

упомянутый минимум можно искать на множестве функций, которые принадлежат пространству $W_2^{(1)}(S)$ и обращаются в нуль на S .

Полагая в (3.36) опять $v = u - \psi$, найдем после некоторых несложных преобразований, что $F(u)$ только постоянным слагаемым отличается от функционала

$$\int_{\Omega} [(grad u)^2 - 2uf] dx. \quad (3.37)$$

Отсюда следует, что решение поставленной нами задачи можно строить как решение задачи о минимуме функционала (3.37) на множестве тех функций из $W_2^{(1)}(\Omega)$, которые на границе S принимают заданное значение $g(x)$.

Мы пришли к этому выводу, потребовав, чтобы существовала функция $\psi(x) \in W_2^{(2)}(\Omega)$, удовлетворяющая условию $\psi|_S = g(x)$. Это требование можно несколько ослабить: до-

статочно, чтобы $\psi(x) \in W_2^{(1)}(\Omega)$. Последнее требование и необходимо: если не существует функции из $W_2^{(1)}(\Omega)$, принимающей на S значение $g(x)$, то задача о минимуме функционала (3.37) лишена смысла.

Применяя к функционалу (3.37) метод Ритца, можно выбрать систему координатных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$, удовлетворяющих условиям п. 3; в частности, эти функции должны обращаться в нуль на границе. Приближенное решение по Ритцу следует искать тогда в виде

$$u_n = \psi(x) + \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x).$$

2) В качестве второго примера рассмотрим задачу об интегрировании того же уравнения $-\Delta u = f(x)$ при краевом условии $\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \right]_S = h(x)$, где σ — положительная и, скажем, непрерывная функция, заданная на границе S . Чтобы свести нашу задачу к вариационной, допустим, как и выше, что существует функция $\psi(x) \in W_2^{(2)}(\Omega)$, удовлетворяющая краевому условию $\left[\frac{\partial \psi}{\partial \nu} + \sigma \psi \right]_S = h$, и положим $u - \psi = v$. Тогда $-\Delta v = f(x) - \Delta \psi$ и $\left[\frac{\partial v}{\partial \nu} + \sigma v \right]_S = 0$. Последняя задача сводится к задаче о минимуме функционала

$$(-\Delta v, v) - 2(v, f - \Delta \psi),$$

который в данном случае приводится с помощью элементарных преобразований к виду

$$\int_{\Omega} [(grad v)^2 - 2v(f - \Delta \psi)] dx + \int_S \sigma v^2 dS. \quad (3.38)$$

Для этого функционала краевое условие $\left[\frac{\partial v}{\partial \nu} + \sigma v \right]_S = 0$ естественное, и минимум функционала следует искать на функциях пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$, не подчиненных никаким краевым условиям. Полагая в (3.38) $v = u - \psi$, мы, как и выше, убедимся, что функционал (3.38) только постоянным слагаемым отличается от функционала

$$\int_{\Omega} [(grad u)^2 - 2uf] dx + \int_S (\sigma u^2 - 2uh) dS. \quad (3.39)$$

Тем самым неоднородная смешанная задача приведена к задаче о минимуме функционала (3.39); минимум следует искать в пространстве $W_2^{(1)}(\Omega)$.

В данном случае допущение о существовании функции $\psi(x)$ на самом деле не необходимо.

7. Энергетический метод в случае положительного оператора. Рассмотрим уравнение $Au = f$, предполагая, что в выбранном гильбертовом пространстве оператор A положительный, но не положительно определенный. По теореме 10 наше уравнение по-прежнему равносильно задаче о минимуме функционала (3.17), однако в данном случае эта вариационная задача, вообще говоря, неразрешима даже в обобщенном смысле. Укажем необходимое и достаточное условие разрешимости этой задачи.

Как и в случае положительно определенного оператора, можно построить энергетическое пространство H_A ; на этот раз оно содержит не только элементы исходного пространства, но и некоторые новые элементы.

Имеем $(Au, u) = |u|^2$, так что

$$F(u) = |u|^2 - 2(u, f).$$

Для того чтобы задача о минимуме функционала $F(u)$ имела решение в H_A , необходимо и достаточно, чтобы в этом пространстве был ограничен линейный функционал (u, f) . В этом случае по теореме Риса существует такой элемент $u_0 \in H_A$, что $(u, f) = [u, u_0]$, если $u \in H_A$; элемент u_0 реализует минимум функционала $F(u)$ в пространстве H_A .

К положительным операторам часто приводят краевые задачи для бесконечных областей; подробнее об этом будет сказано в § 3, п. 10.

То обстоятельство, что $u_0 \in H_A$, можно интерпретировать физически так, что этот элемент имеет конечную энергию; если выполнено условие ограниченности функционала (u, f) в H_A , то соответствующий элемент u_0 будем называть *решением с конечной энергией* для уравнения $Au = f$.

Заметим, что в случае положительно определенного оператора также можно трактовать элемент, реализующий минимум $F(u)$, как решение с конечной энергией.

§ 3. Приложения к задачам математической физики

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. Многие важные задачи математической физики сводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка вида

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x), \quad (3.40)$$

которое надлежит проинтегрировать в промежутке $a \leq x \leq b$ при краевых условиях

$$\alpha u'(a) - \beta u(a) = 0, \quad \gamma u'(b) + \delta u(b) = 0, \quad (3.41)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — некоторые постоянные. Простейшая из задач такого рода — это задача о статическом прогибе струны, которая в состоянии равновесия занимает отрезок $a \leq x \leq b$ оси x и элемент $(x, x + dx)$ которой находится под воздействием восстанавливающей силы $q(x)u dx$ и внешней силы $f(x) dx$, причем к концам x и $x + dx$ элемента приложены силы натяжения $p(x)$ и $p(x + dx)$ соответственно. Краевые условия (3.41) в общем случае соответствуют упругому закреплению концов струны.

В частном случае, если, например, $\alpha \neq 0, \beta = 0$, то конец $x = a$ струны свободен; если же $\alpha = 0, \beta \neq 0$, то этот конец жестко закреплен.

Для того чтобы оператор L , определенный левой частью уравнения (3.40) и краевыми условиями (3.41), был положительно определенным, достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

1) При $a \leq x \leq b$ функции $p'(x)$ и $q(x)$ кусочно-непрерывны и неотрицательны.

2) Функция $p(x)$ может обращаться в нуль в некоторых точках интервала $a < x < b$, но так, чтобы интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{p(x)} \quad (3.42)$$

сходился. Мы предполагаем еще, что $p(a) \neq 0, p(b) \neq 0$. Простейший случай, при котором условие 2) выполняется, это случай $p(x) \geq p_0$, где p_0 — положительная постоянная.

3) Постоянные α , β , γ , δ неотрицательны, причем хотя бы одна из постоянных β и δ положительна.

При выполнении перечисленных условий, а также дополнительного условия $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$ интегрирование уравнения (3.40) при условиях (3.41) сводится к задаче о минимуме функционала

$$\int_a^b [p(x) u'^2(x) + q(x) u^2(x) - 2f(x) u(x)] dx + \\ + \frac{\beta}{\alpha} p(a) u^2(a) + \frac{\delta}{\gamma} p(b) u^2(b); \quad (3.43)$$

краевые условия (3.41) в этом случае естественные, и им заранее удовлетворять нет нужды. Если какая-либо из постоянных α или γ равна нулю, то соответствующий внеинтегральный член в (3.43) следует вычеркнуть, а соответствующее условие (3.41) становится главным. В частности, если $\alpha = \gamma = 0$, так что краевые условия принимают вид

$$u(a) = u(b) = 0, \quad (3.44)$$

дело сводится к нахождению минимума интеграла

$$\int_a^b [p(x) u'^2(x) + q(x) u^2(x) - 2f(x) u(x)] dx \quad (3.45)$$

на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям (3.44).

Если $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) — минимизирующая последовательность для функционала (3.43), то сама эта последовательность сходится к точному решению равномерно, а последовательность производных $u'_n(x)$ сходится к производной от точного решения в среднем с весом $p(x)$; это значит, что если $u_0(x)$ — точное решение, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b p(x) [u'_n(x) - u'_0(x)]^2 dx = 0.$$

В частном случае, когда $p(x)$ ограничена снизу положительным числом: $p(x) \geq p_0 > 0$, то $u'_n(x)$ сходится к $u'_0(x)$

в среднем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [u'_n(x) - u'_0(x)]^2 dx = 0.$$

Рассмотрим теперь исключенный ранее случай $\beta = \delta = 0$; краевые условия принимают вид

$$u'(a) = u'(b) = 0. \quad (3.46)$$

Если при этом неотрицательная по условию 1) функция $q(x)$ отлична от тождественного нуля, то оператор L остается и в этом случае положительно определенным; интегрирование уравнения (3.40) при краевых условиях (3.46) сводится к задаче о минимуме интеграла (3.45) на множестве функций, которые не обязаны удовлетворять каким бы то ни было краевым условиям. Если же $q(x) \equiv 0$ и $\beta = \delta = 0$, то оператор L , который в данном случае принимает вид

$$Lu = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right), \quad (3.47)$$

при краевых условиях (3.46) не будет даже положительным. В этом случае задача $Lu = f(x)$, $u'(a) = u'(b) = 0$, неразрешима, если не выполнено равенство

$$(f, 1) = \int_a^b f(x) dx = 0, \quad (3.48)$$

поэтому будем считать упомянутое условие выполненным. Условие (3.48) означает, что $f(x)$ принадлежит подпространству \tilde{H} пространства $L_2(a, b)$, ортогональному к единице. В этом подпространстве оператор (3.47) при краевых условиях (3.46) оказывается положительно определенным, и задача об интегрировании уравнения

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x) \quad (3.49)$$

при условиях (3.46) имеет решение, которое можно получить, отыскивая минимум интеграла

$$\int_a^b p(x) u'^2(x) dx$$

на множестве функций, удовлетворяющих условию $(u, 1) = 0$. Следует, впрочем, заметить, что уравнение (3.49) интегрируется элементарно.

Представляет интерес и тот случай, когда функция $p(x)$ обращается в нуль на одном из концов a , b (или на обоих сразу). Такой случай, например, имеет место, если изучается смещение под действием внешней силы тяжелой струны, подвешенной за верхний конец; в этом случае функция $p(x)$, пропорциональная весу участка струны от нижнего ее конца до точки x , обращается в нуль на нижнем конце.

Для простоты ограничимся случаем, когда $p(a) = 0$, $p(b) \neq 0$ и краевое условие на конце b имеет вид $u(b) = 0$. Может случиться, что интеграл (3.42) сходится; тогда, чтобы задача имела определенное решение, следует поставить некоторое краевое условие при $x = a$. Можно поставить условие $u(a) = 0$; тогда оператор L положительно определенный и дело сводится к задаче о минимуме функционала (3.45) при краевых условиях (3.44). Если интеграл (3.42) расходится, то на конце $x = a$ краевое условие задавать нельзя: в общем случае не существует решения, удовлетворяющего такому условию. В случае расходимости интеграла (3.42) условие на конце $x = a$ заменяется требованием, чтобы искомая функция $u(x)$ была квадратично суммируема в промежутке $a < x < b$. При перечисленных условиях оператор L будет положительно определенным, если интеграл

$$\int_a^b \frac{(x-a)}{p(x)} dx \quad (3.42')$$

сходится; это будет иметь место, например, если при некоторой постоянной $\alpha < 2$ выполняется неравенство $p(x) \geq C(x-a)^\alpha$, $C = \text{const} > 0$. Если интеграл (3.42') сходится, то отыскание решения уравнения (3.40), удовлетворяющего условию $u(b) = 0$ и квадратично суммируемого в промежутке $a < x < b$, сводится к отысканию минимума функционала (3.45) на множестве функций, которые обращаются в нуль при $x = b$. Тот же результат имеет место и тогда, когда интеграл (3.42') расходится, но функция $p(x)$ удовлетворяет неравенству $p(x) \geq C(x-a)^2$, $C = \text{const} > 0$.

Если $p(x)$ удовлетворяет неравенству $p(x) \leq C(x-a)^\alpha$, где $\alpha > 2$, то на множестве функций, обращающихся в нуль

при $x = b$, оператор L будет положительным, но не положительно определенным; сформулированная выше краевая задача по-прежнему сводится к задаче о минимуме функционала (3.45) на том же множестве функций, которые при $x = b$ обращаются в нуль; однако эта вариационная задача может не иметь решения.

2. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков. Рассмотрим уравнение порядка $2m$:

$$Lu \equiv \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} \right) = f(x), \quad (3.50)$$

и будем искать решение этого уравнения, определенное в промежутке $a \leq x \leq b$ и удовлетворяющее простейшим крайним условиям

$$u(a) = u'(a) = \dots = u^{(m-1)}(a) = 0, \quad (3.51')$$

$$u(b) = u'(b) = \dots = u^{(m-1)}(b) = 0. \quad (3.51'')$$

Допустим, что все коэффициенты $p_k(x)$ неотрицательны, а старший коэффициент $p_m(x)$ удовлетворяет еще и более жесткому условию $p_m(x) \geq c$, где c — положительная постоянная. Тогда оператор L положительно определен на множестве функций, удовлетворяющих условиям (3.51); краевая задача (3.50), (3.51) равносильна задаче о минимуме функционала

$$\int_a^b \left\{ \sum_{k=0}^m p_k(x) \left(\frac{d^k u}{dx^k} \right)^2 - 2f(x)u(x) \right\} dx \quad (3.52)$$

на множестве функций, удовлетворяющих условиям (3.51). Эти условия главные.

Если $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) — последовательность приближенных по Ритцу решений нашей задачи, а $u_0(x)$ — ее точное решение, то $u_n^{(m)}(x) \rightarrow u_0^{(m)}(x)$ в среднем; производные низших порядков от приближенных решений сходятся к соответствующим производным точного решения равномерно.

Пусть теперь старший коэффициент $p_m(x)$, будучи положительным при $a < x < b$, обращается в нуль при $x = a$.

Допустим, что при этом

$$c_1(x-a)^\alpha \leq p_m(x) \leq c_2(x-a)^\alpha, \quad (3.53)$$

где c_1, c_2, a — положительные постоянные. Если $\alpha \leq 2m$, то оператор L оказывается положительно определенным на множестве функций, удовлетворяющих условиям (3.51'') и, кроме того, условиям

$$u(a) = u'(a) = \dots = u^{(m-\mu-1)}(a) = 0, \quad (3.54)$$

где μ — целая часть показателя α . В частности, если $\alpha < 1$, то следует удовлетворить всем условиям (3.51'); в другом крайнем случае, когда $2m-1 < \alpha \leq 2m$, никаких условий на конце $x=a$ задавать не следует. Если выполняется неравенство (3.53), то задача об интегрировании уравнения (3.50) при краевых условиях (3.51'') и (3.54) равносильна задаче о минимуме функционала (3.52) на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям (3.51'') и (3.54).

Обозначая по-прежнему через $u_0(x)$ точное решение задачи, а через $u_n(x)$ приближенное решение по Рунту, можно доказать, что $u_n^{(m)}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u_0^{(m)}(x)$ в среднем с весом $(x-a)^\alpha$; это значит, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (x-a)^\alpha [u_n^{(m)}(x) - u_0^{(m)}(x)]^2 dx = 0;$$

отсюда следует, что производные порядка ниже m от приближенных решений сходятся к соответствующим производным точного решения равномерно на отрезке $a + \varepsilon \leq x \leq b$, где ε — любое положительное число.

Если в неравенстве (3.53) $\alpha > 2m$, то можно задавать только краевые условия (3.51''); при этих условиях оператор L положительный, но не положительно определенный. Краевая задача равносильна задаче о минимуме функционала (3.52) на множестве функций, удовлетворяющих условиям (3.51''), но эта последняя задача может оказаться неразрешимой.

Краевые условия могут иметь вид, отличный от (3.51); некоторое, хотя и далеко не полное представление о других возможных типах краевых условий можно получить из следующего примера.

Пример 9. Изгиб балки, лежащей на упругом основании.

Пусть ось балки занимает отрезок $(0, l)$ оси x . Сечение балки будем считать, вообще говоря, переменным. Обозначим через $u(x)$ прогиб балки в сечении с абсциссой x , через $I(x)$ — момент инерции этого сечения, через $K(x)$ и $f(x)$ — коэффициент податливости основания и интенсивность действующей на балку нормальной нагрузки в том же сечении. Наконец, через E обозначим модуль Юнга материала балки. Уравнение изгиба балки имеет вид

$$Lu = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + K(x)u = f(x). \quad (3.55)$$

Рассмотрим сперва случай, когда ни одно из сечений балки не вырождается в точку или линию, так что момент инерции $I(x)$ всегда остается больше некоторой положительной постоянной. Если концы балки жестко закреплены, то

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u(l) = u'(l) = 0 \quad (3.56)$$

и мы приходим к частному случаю задачи (3.50), (3.51). Прогиб $u(x)$ можно найти как решение задачи о минимуме функционала

$$\int_0^l \left\{ EI(x) \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 + K(x)u^2(x) - 2f(x)u(x) \right\} dx \quad (3.57)$$

на множестве функций, удовлетворяющих условиям (3.56). Если $u_n(x)$ — приближенное решение по Ритцу, а $u_0(x)$ — точное решение, то $u_n''(x) \rightarrow u_0''(x)$ в среднем, а $u_n'(x) \rightarrow u_0'(x)$ и $u_n(x) \rightarrow u_0(x)$ равномерно.

Если один из концов балки, например конец $x=l$, свободен, а другой жестко закреплен, то вторая пара условий (3.56) заменяется следующей:

$$u''(l) = 0, \quad \frac{d}{dx} [EI(x)u''(x)]_{x=l} = 0. \quad (3.58)$$

Оператор L остается положительно определенным и в этом случае. Условия (3.58) естественные.

Допустим теперь, что в каком-либо сечении $I(x)$ обращается в нуль. Остановимся на частном случае, когда стержень имеет вид конуса произвольной формы с вершиной

в точке $x=0$. В этом случае $I(x) = \frac{x^4}{l^4} I(l)$ и мы приходим к неравенству (3.53), которое в данном случае переходит в равенство при $c_1 = c_2 = \frac{I(l)}{l^4}$ и $\alpha = 2m = 4$. Краевых условий на конце $x=0$ задавать нельзя; если конец $x=l$ жестко закреплен, то следует положить $u(l) = u'(l) = 0$. Оператор L и в этом случае положительно определен; задача сводится к вариационной задаче о минимуме интеграла

$$\int_0^l \left\{ \frac{EI(l)}{l^4} x^4 \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 + K(x) u^2(x) - 2f(x) u(x) \right\} dx$$

на множестве функций, удовлетворяющих условиям $u(l) = u'(l) = 0$. Эта вариационная задача разрешима; если $u_0(x)$ — ее точное решение, а $u_n(x)$ — приближенные решения по Ритцу, то $u_n''(x) \rightarrow u_0''(x)$ в среднем с весом x^4 , а $u_n'(x) \rightarrow u_0'(x)$ и $u_n(x) \rightarrow u_0(x)$ равномерно на отрезке $\varepsilon \leq x \leq l$, где ε — любое положительное число.

3. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим простейший случай, когда система имеет вид

$$-\sum_{k=1}^s \left[\frac{d}{dx} \left(p_{jk}(x) \frac{du_k}{dx} \right) + q_{jk}(x) u_k \right] = f_j(x) \quad (3.59)$$

$$(j=1, 2, \dots, s; \quad a < x < b),$$

а краевые условия принимают простейшую форму

$$u_j(a) = u_j(b) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (3.60)$$

Коэффициенты $p_{jk}(x)$ и $q_{jk}(x)$ считаем вещественными, ограниченными и измеримыми; практически интересен тот случай, когда эти коэффициенты непрерывны или кусочно-непрерывны.

Совокупности данных функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ и искомых функций $u_1(x), u_2(x), \dots, u_s(x)$ можно трактовать как векторы $f(x)$ и $u(x)$ с s компонентами. Левые части уравнений (3.59) вместе с краевыми условиями (3.60) порождают некоторый оператор в пространстве s -компонент-

Коэффициенты a_k определяются из системы (3.24); в данном случае

$$[\Phi_j, \Phi_k] = \int_a^b \left[\sum_{\alpha, \beta=1}^s p_{\alpha\beta} \frac{d\Phi_{\alpha j}}{dx} \frac{d\Phi_{\beta k}}{dx} + q_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha j} \Phi_{\beta k} \right] dx.$$

Если координатные функции принадлежат области определения оператора данной задачи¹⁾, то можно воспользоваться также формой (3.24') системы Ритца; в нашем случае

$$(A\Phi_j, \Phi_k) = \int_a^b \left[- \sum_{\alpha, \beta=1}^s \left(\frac{d}{dx} \left(p_{\alpha\beta} \frac{d\Phi_{\alpha j}}{dx} \right) + q_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha j} \right) \Phi_{\beta k} \right] dx.$$

О сходимости приближенного решения к точному можно повторить все, что было сказано об одном уравнении второго порядка (см. п. 1 настоящего параграфа).

Если через $p(x)$ и $q(x)$ обозначить матрицы с составляющими $p_{jk}(x)$ и $q_{jk}(x)$, то уравнения (3.59) и (3.60) можно записать в виде

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x) u = f(x), \quad (3.59')$$

$$u(a) = u(b) = 0, \quad (3.60')$$

что по форме совпадает с уравнениями (3.40) и (3.44). Можно указать и более сложные краевые условия, при которых оператор в левой части уравнения (3.59) будет положительно определенным. Так будет, например, если краевые условия имеют вид

$$u'(a) - \beta u(a) = 0, \quad u'(b) + \delta u(b) = 0,$$

где β и δ — неотрицательные матрицы, из которых хотя бы одна положительно определенная.

Можно рассмотреть и систему уравнений порядка выше второго

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} \right) = f(x), \quad (3.50')$$

¹⁾ В простейшем случае, когда коэффициенты $p_{jk}(x)$ непрерывно дифференцируемы, а коэффициенты $q_{jk}(x)$ непрерывны, для этого достаточно, чтобы функции $\Phi_{jn}(x)$ имели непрерывные вторые производные и обращались в нуль при $x=a$ и $x=b$.

где $u(x)$ и $f(x)$ — s -компонентные вектор-функции, а $p_k(x)$ — симметричные матрицы порядка s . Будем решать эту систему при краевых условиях (3.51), разумеется, полагая, что входящая в эти условия функция $u(x)$ векторная, так что эту функцию лучше обозначить через $u(x)$. Порожденный такой задачей оператор будет положительно определенным, если матрицы $p_k(x)$ ($k=0, 1, 2, \dots, m-1$) неотрицательны при всех x , $a \leq x \leq b$, а матрица $p_m(x)$ при этих же x положительно определенная; точнее говоря, о матрице $p_m(x)$ мы предполагаем, что все ее собственные числа (которые, вообще говоря, зависят от x) ограничены снизу некоторой положительной постоянной.

4. Основные задачи для уравнений эллиптического типа. Уравнения Лапласа и Пуассона. Будем рассматривать самосопряженное уравнение эллиптического типа второго порядка

$$Au = - \sum_{i, j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + C(x)u = f(x), \quad (3.61)$$

$$A_{ij} = A_{ji}.$$

Коэффициенты A_{ij} и C в общем случае суть функции координат x_1, x_2, \dots, x_m переменной точки x ; в частных случаях эти коэффициенты могут быть и постоянными. Будем считать, что искомая функция должна быть определена в некоторой конечной области Ω .

Уравнение (3.61) мы считаем *эллиптическим* в области Ω ; это значит, что, каковы бы ни были точка $x \in \Omega$ и вещественные числа t_1, t_2, \dots, t_m , найдется такая положительная величина $\mu(x)$, что

$$\sum_{i, j=1}^m A_{ij}(x) t_i t_j \geq \mu(x) \sum_{i=1}^m t_i^2.$$

Приходится различать два случая:

1) Нижняя грань чисел $\mu(x)$ положительна. Тогда существует такая положительная постоянная μ_0 , что для любой точки $x \in \Omega$ выполняется неравенство $\mu(x) \geq \mu_0$. В этом случае эллиптическое уравнение называется *невырождающимся*. Для невырождающегося уравнения справедливо

неравенство

$$\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x) t_i t_j \geq \mu_0 \sum_{i=1}^m t_i^2, \quad \mu_0 = \text{const} > 0.$$

2) Нижняя грань чисел $\mu(x)$ равна нулю. В этом случае эллиптическое уравнение называется *вырождающимся*. Если коэффициенты A_{ij} непрерывны в замкнутой области $\Omega + S$, то на некотором множестве точек поверхности S величина $\mu(x) = 0$. Это множество в зависимости от его структуры называют линией, поверхностью и т. д. вырождения.

Для невырождающихся эллиптических уравнений чаще всего ставятся следующие задачи, различающиеся по типу краевых условий, которые пока будем считать однородными.

Задача Дирихле или первая краевая задача:

$$u|_S = 0. \quad (3.62)$$

Задача Неймана или вторая краевая задача:

$$\left[\sum_{i,j=1}^m A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(v, x_i) \right]_S = 0. \quad (3.63)$$

Третья краевая задача:

$$\left[\sum_{i,j=1}^m A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(v, x_i) + \sigma u \right]_S = 0. \quad (3.64)$$

Здесь v — внешняя нормаль к поверхности S , σ — неотрицательная и отличная от тождественного нуля функция, определенная на поверхности S .

Если коэффициент $C(x) \geq 0$, то при краевых условиях (3.62) и (3.64) оператор A , входящий в левую часть невырождающегося уравнения (3.59), положительно определен. Задача Дирихле сводится к задаче о минимуме функционала

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^m A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + Cu^2 - 2fu \right) dx \quad (3.65)$$

(dx — элемент объема) на множестве функций, удовлетворяющих условию (3.62); третья краевая задача сводится

к задаче о минимуме несколько иного функционала:

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^m A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + Cu^2 - 2fu \right) dx + \int_S \sigma u^2 dS, \quad (3.66)$$

в классе функций, на которых этот функционал имеет конечное значение, т. е. в классе $W_2^{(1)}(\Omega)$ (см. § 1, п. 4). Краевому условию (3.64) подчинять эти функции нет необходимости, так как это условие естественное.

Если коэффициент $C(x)$ не только неотрицателен, но и отличен от тождественного нуля, то оператор A положительно определенный и на множестве функций, удовлетворяющих условию (3.63); задача Неймана равносильна вариационной задаче о минимуме интеграла (3.65) на функциях класса $W_2^{(1)}(\Omega)$. Краевое условие (3.63) естественное.

Особо остановимся на задаче Неймана в случае, когда $C \equiv 0$. Уравнение (3.61) принимает вид

$$A_0 u = - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f(x). \quad (3.67)$$

Задача Неймана для этого уравнения в общем случае неразрешима; необходимым и достаточным условием ее разрешимости является равенство

$$(f, 1) = \int_{\Omega} f(x) dx = 0. \quad (3.68)$$

С другой стороны, если задача Неймана разрешима, то она имеет бесчисленное множество решений, которые различаются на постоянное слагаемое. Можно это слагаемое подобрать так, чтобы $(u, 1) = 0$. Теперь можно в уравнении (3.67) рассматривать данную функцию $f(x)$ и искомую $u(x)$ как элементы подпространства, ортогонального к единице. В этом подпространстве оператор A_0 положительно определенный на множестве функций, удовлетворяющих условию (3.63). Задача Неймана равносильна задаче о минимуме интеграла

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^m A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx$$

на множестве функций из $W_2^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющих условию

$$(u, 1) = \int_{\Omega} u(x) dx = 0; \quad (3.69)$$

эта вариационная задача разрешима и имеет единственное решение.

Иногда рассматриваются краевые условия смешанного типа: граница S разбивается на две части S' и S'' , искомое решение подчиняется условиям

$$u|_{S'} = 0, \quad \left[\sum_{i,j=1}^m A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\nu, x_j) + \sigma u \right]_{S''} = 0. \quad (3.70)$$

Оператор A в уравнении (3.61) при этом положительно определен, и «смешанная» краевая задача равносильна задаче о минимуме функционала

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^m A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + Cu^2 - 2uf \right) dx + \int_{S''} \sigma u^2 dS$$

на множестве функций, удовлетворяющих первому из условий (3.70); второе из этих условий естественное.

Все сказанное об эллиптических уравнениях в полной мере относится к уравнению Пуассона

$$-\Delta u = f(x), \quad (3.61')$$

где Δ — оператор Лапласа. Краевые условия второй и третьей краевых задач для этого уравнения упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_S = 0 \quad (3.63')$$

и

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \right]_S = 0. \quad (3.64')$$

Для определенности будем писать последующие формулы в предположении, что u зависит от трех координат (x, y, z) . Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона равно-

сильны задачам о минимуме интеграла

$$\iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - 2fu \right] dx dy dz$$

на множествах функций из класса $W_2^{(1)}(\Omega)$, подчиненных в случае задачи Дирихле условию (3.62), а в случае задачи Неймана условию (3.69); в этом случае необходимо, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла условию (3.68).

В п. 6 § 2 указаны вариационные задачи, к которым сводятся основные краевые задачи для уравнения Пуассона (или Лапласа) в случае *неоднородных* краевых условий. Для общего уравнения эллиптического типа результаты аналогичны, а именно:

1) Пусть требуется проинтегрировать уравнение (3.61) при краевом условии

$$u|_S = g(x). \quad (3.62')$$

Допустим (это допущение необходимо), что существует некоторая функция $\psi(x) \in W_2^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющая этому краевому условию, так что $\psi|_S = g(x)$. Тогда наша задача сводится к нахождению функции, реализующей минимум функционала (3.65) на множестве тех функций из $W_2^{(1)}(\Omega)$, которые удовлетворяют краевому условию (3.62').

Применяя здесь метод Ритца, следует представить приближенное решение в виде

$$u_n(x) = \psi(x) + \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x),$$

где $\psi(x)$ — упомянутая выше функция, удовлетворяющая условию (3.62'), и $\varphi_k(x)$ — функции из $W_2^{(1)}(\Omega)$, обращающиеся в нуль на границе S и удовлетворяющие условиям п. 3 § 2 для координатных функций.

2) Пусть то же уравнение (3.61) требуется проинтегрировать при краевом условии

$$\left[\sum_{i,j=1}^m A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\nu, \dot{x}_i) + \sigma u \right]_S = h(x). \quad (3.64'')$$

Эта задача приводится к задаче о минимуме функционала

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{i, j=1}^m A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + Cu^2 - 2uf \right] dx + \int_S (\sigma u^2 - 2uh) dS;$$

минимум следует искать на множестве функций $W_2^{(1)}(\Omega)$; условие (3.64") естественное.

Пример 10. Для иллюстрации метода рассмотрим задачу о нахождении интеграла уравнения

$$-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 1 \quad (3.71)$$

в области квадрата $-1 \leq x, y \leq 1$ при условии, что на контуре квадрата искомый интеграл обращается в нуль:

$$u(x, \pm 1) = u(\pm 1, y) = 0. \quad (3.72)$$

Искомая функция $u(x, y)$ только постоянным множителем отличается от функции напряжений задачи о кручении стержня квадратного сечения.

Условия (3.72) главные, и координатные функции необходимо должны им удовлетворять. Возьмем в качестве координатных функций полиномы вида

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1)x^m y^n \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Из постановки задачи видно, что функция $u(x, y)$ четная как относительно x , так и относительно y ; кроме того, она не изменится, если x и y поменять местами. Отсюда легко следует, что в качестве координатных достаточно использовать такие функции:

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^{2m} y^{2n} + x^{2n} y^{2m}) \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ограничимся двумя первыми координатными функциями; приближенное по Ритцу решение имеет вид

$$u_2(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)[a_0 + a_1(x^2 + y^2)].$$

В данном случае энергетическое произведение определяется формулой

$$[u, v] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

и мы получаем следующую систему Ритца (ср. формулу (3.24)):

$$\begin{aligned} \frac{256}{45} a_1 + \frac{1024}{525} a_2 &= \frac{16}{9}, \\ \frac{1024}{525} a_1 + \frac{11264}{4725} a_2 &= \frac{32}{45}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{16}{15} a_1 + \frac{64}{175} a_2 = \frac{1}{3},$$

$$\frac{32}{35} a_1 + \frac{352}{315} a_2 = \frac{1}{3}.$$

Отсюда

$$a_1 = \frac{1295}{4432} \approx 0,292, \quad a_2 = \frac{525}{8864} \approx 0,0592$$

и, следовательно,

$$u_2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1)[0,292 + 0,0592(x^2 + y^2)]. \quad (3.73)$$

Ниже (см. п. 3 § 5) мы сможем составить некоторое суждение о точности построенного приближения.

5. Вырождающиеся эллиптические уравнения. Ограничимся здесь рассмотрением задачи Дирихле для наиболее простого уравнения с двумя независимыми переменными

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\omega(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y), \quad (3.74)$$

где непрерывные функции $\Phi(x, y)$ и $\omega(x, y)$ положительны при $y > 0$, но одна из них обращается в нуль при $y = 0$. Уравнение (3.74) эллиптическое в верхней полуплоскости и вырождается на оси x .

Пусть область Ω имеет вид, изображенный на рис. 15; граница S состоит из двух частей: S' , представляющей собой отрезок оси x , и S'' , расположенной в верхней полуплоскости.

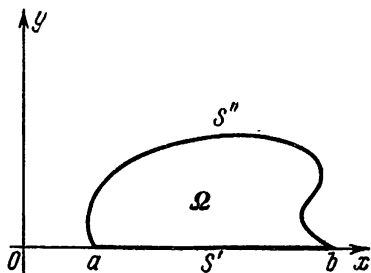


Рис. 15.

Пусть $\Phi(x, y) > 0$ при $y > 0$, $\Phi(x, 0) = 0$ и $\omega(x, y) \geq k$,

где k — положительная постоянная. Тогда для уравнения (3.71) можно ставить обычное условие (3.62) задачи Дирихле; на множестве функций, удовлетворяющих этому условию, оператор $-\frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\omega(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ оказывается положительно определенным, и наша задача сводится

к задаче о минимуме интеграла

$$\iint_{\Omega} \left[\varphi(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \omega(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2f(x, y) u \right] dx dy \quad (3.75)$$

на множестве функций, удовлетворяющих условию (3.62).

Рассмотрим теперь случай, когда $\varphi(x, y)$ остается положительной при $y \geq 0$, но $\omega(x, 0) = 0$. В этом случае разрешимость задачи зависит от скорости убывания функции ω при $y \rightarrow 0$.

Допустим, что $\omega(x, y) = y^\alpha \omega_1(x, y)$, где $\omega_1(x, y) \geq k_1$, α и k_1 — положительные постоянные. Если $\alpha < 1$, то можно ставить обычное условие (3.62). Задача Дирихле равносильна только что сформулированной задаче о минимуме функционала (3.75). Если $1 \leq \alpha \leq 2$, то на линии вырождения S' ничего задавать нельзя: оператор в левой части уравнения (3.74) положительно определенный на множестве функций, удовлетворяющих единственному условию

$$u|_{S'} = 0, \quad (3.76)$$

и уравнение (3.74) при краевом условии (3.76) имеет единственное решение, которое можно получить, решая задачу о минимуме интеграла (3.75) при условии (3.76). Если $\alpha > 2$, то при условии (3.76) оператор в (3.74) положительный, но не положительно определенный; по-прежнему крайняя задача равносильна задаче о минимуме интеграла (3.75) при условии (3.76), но эта последняя в общем случае неразрешима.

6. Уравнения высших порядков. Уравнения эллиптического типа четвертого порядка встречаются в теории изгиба пластин, в плоской задаче теории упругости, в теории кручения анизотропных стержней; в некоторых задачах теории упругости анизотропных сред встречаются уравнения шестого порядка; уравнения восьмого порядка играют роль в теории оболочек. Уравнения высших порядков встречаются и в некоторых других задачах.

Самосопряженное уравнение в частных производных порядка $2n$ в пространстве m независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_m в самом общем случае можно записать в

виде

$$L_{2n}u = \sum_{k=0}^n A_k u = f(x),$$

$$A_k u = \sum \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \left(A_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}} \right). \quad (3.77)$$

В выражении $A_k u$ суммирование производится по всевозможным наборам индексов i_1, i_2, \dots, i_k и j_1, j_2, \dots, j_k , каждый из которых независимо от других пробегает значения $1, 2, \dots, m$; коэффициенты $A_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ не меняются ни при какой перестановке верхних и нижних индексов, а также при замене верхних индексов нижними и наоборот.

Уравнение (3.77) называется эллиптическим не вырождающимся в данной области Ω , если выполнено следующее условие. Пусть t_{i_1, i_2, \dots, i_n} — вещественные переменные, не меняющиеся ни при какой перестановке значков i_1, i_2, \dots, i_n ; существует такая положительная постоянная μ_n , что при любом $x \in \Omega$ и при любых значениях переменных t_{i_1, i_2, \dots, i_n} выполняется неравенство

$$\sum A_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{i_1, i_2, \dots, i_n}(x) t_{i_1, i_2, \dots, i_n} t_{j_1, j_2, \dots, j_n} \geq \mu_n \sum t_{i_1, i_2, \dots, i_n}^2. \quad (3.78)$$

Общее уравнение (3.77) будем рассматривать при простейших краевых условиях

$$u|_S = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_{i_1}} \Big|_S = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \Big|_S = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{n-1}}} \Big|_S = 0, \quad (3.79)$$

где значки i_1, i_2, \dots, i_{n-1} независимо друг от друга пробегают все значения от 1 до m ; условия (3.79) означают, что функция u и все ее производные до порядка $n-1$ включительно обращаются в нуль на границе S .

На функциях, удовлетворяющих условиям (3.79), оператор L_{2n} будет положительно определенным, если для каждого оператора A_k найдется такая постоянная μ_k , что выполняется неравенство

$$\sum A_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k} t_{i_1, i_2, \dots, i_k} t_{j_1, j_2, \dots, j_k} \geq \mu_k \sum t_{i_1, i_2, \dots, i_k}^2 \quad (3.78')$$

причем $\mu_n > 0$ и $\mu_k \geq 0$ при $0 \leq k \leq n-1$. Соответствующая уравнению (3.78) и краевым условиям (3.79) вариационная задача состоит в нахождении минимума интеграла

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{k=0}^n \sum A_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k} \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}} - 2fu \right] dx \quad (3.80)$$

на множестве функций, удовлетворяющих условиям (3.79).

С помощью формул (3.77) можно записать и систему уравнений в частных производных, если под $u(x)$ и $f(x)$ понимать s -компонентные вектор-функции, а под $A_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}(x)$ — матрицы порядка s . Все сказанное в настоящем пункте об одном уравнении распространяется без изменений и на системы уравнений; при этом надо только в неравенстве (3.78) понимать под i_1, i_2, \dots, i_n произвольный s -компонентный вектор с вещественными компонентами.

...

7. Изгиб пластин. Уравнение изгиба тонких упругих пластин имеет вид

$$\Delta^2 w = \frac{q(x, y)}{D} \quad (3.81)$$

или, в более подробной записи,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}.$$

Здесь $w(x, y)$ — нормальный прогиб пластины в точке с координатами x, y ; $q(x, y)$ — интенсивность нормальной нагрузки, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$, где E и σ — модуль Юнга и постоянная Пуассона материала пластины, $2h$ — ее толщина. Область, которую пластина вырезает из плоскости (x, y) , обозначим через Ω , контур этой области — через S . В зависимости от характера закрепления края пластины имеем следующие наиболее часто встречающиеся краевые условия.

1) Край пластины жестко закреплен:

$$w|_S = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu}|_S = 0. \quad (3.82)$$

2) Край пластины свободно оперт:

$$w|_S = 0, \quad \left[\Delta w - \frac{1-\sigma}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \nu} \right]_S = 0. \quad (3.83)$$

3) Край пластины упруго закреплен:

$$w|_S = 0, \quad \left[\Delta w - \left(\frac{1-\sigma}{\rho} - k \right) \frac{\partial w}{\partial \nu} \right]_S = 0. \quad (3.84)$$

4) Край пластины свободен:

$$\left. \begin{aligned} \left[\Delta w - (1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) \right]_S &= 0, \\ \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} - (1-\sigma) \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \right]_S &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.85)$$

В формулах (3.82)—(3.85) ν означает внешнюю нормаль к S , s —направление касательной к контуру, k —положительную постоянную, ρ —радиус кривизны контура S . Разные части края S могут быть закреплены по-разному; в соответствии с этим S может распадаться на несколько частей, на каждой из которых выполняются те или другие из условий (3.82)—(3.85).

Если хотя бы на части контура S выполняется одно из условий (3.82)—(3.84), то бигармонический оператор Δ^2 оказывается положительно определенным. Задача об изгибе пластины равносильна вариационной задаче о минимуме функционала

$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{2q}{D} w \right] dx dy + k \int_{S_3} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right)^2 ds, \quad (3.86)$$

где S_3 —упруго закрепленная часть края S ; если никакая часть края не находится в состоянии упругого закрепления, то контурный интеграл в выражении (3.86) отсутствует. Минимум надлежит искать на множестве функций из класса $W_2^2(\Omega)$, которые удовлетворяют условиям (3.82) на жестко закрепленной части края и условию $w|_S = 0$ на свободно опертой и упруго закрепленной частях края. Остальные краевые условия (3.83)—(3.85) естественные, и нет нужды удовлетворять им заранее.

Если весь край пластины жестко закреплен, то функционал (3.86) можно представить в любой из двух более простых форм:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left[(\Delta w)^2 - \frac{2q}{D} w \right] dx dy = \\ = \iint_{\Omega} \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] - \frac{2q}{D} w \right\} dx dy. \quad (3.87) \end{aligned}$$

Пусть $w_0(x, y)$ — точное решение задачи об изгибе пластины, а $w_n(x, y)$ — приближенное решение задачи о минимуме функционала (3.86), построенное, например, по методу Рунца. Тогда вторые производные от w_n сходятся к соответствующим производным от w_0 в среднем с показателем 2. Из теорем вложения (§ 1, п. 5) вытекает, что $\frac{\partial w_n}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial w_0}{\partial x}$ и $\frac{\partial w_n}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial w_0}{\partial y}$ в среднем с любым сколь угодно большим показателем, а $w_n \rightarrow w_0$ равномерно в $\Omega + S$.

Если пластина имеет переменную толщину, то уравнение (3.81) заменяется таким:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \sigma \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = \frac{q}{D'}, \quad (3.88) \\ D' = \frac{E}{12(1 - \sigma^2)}. \end{aligned}$$

Краевые условия на закрепленной или свободно опертой части края имеют тот же вид, что и для пластины постоянной толщины. Если толщина $2h$ пластины нигде не равна нулю, то на множестве функций, удовлетворяющих условиям (3.82) и (3.83) соответственно на закрепленной и свободно опертой частях края, оператор (3.88) положительно определенный; соответствующая вариационная задача состоит в отыскании минимума интеграла

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left\{ h^3 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(1 - \sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - \frac{2q}{D'} w \right\} dx dy \quad (3.89) \end{aligned}$$

при условиях (3.82) на жестко закрепленной части края и $w|_S = 0$ на его свободно опертой части.

Особо рассмотрим случай, когда часть края пластины острая, т. е. когда на некоторой части края толщина $2h$ обращается в нуль. Ограничимся случаем, когда пластина в плане имеет вид, изображенный на рис. 15, и пусть толщина удовлетворяет неравенству

$$c_1 y^\alpha \leq h(x, y) \leq c_2 y^\alpha, \quad (3.90)$$

где c_1, c_2, α — положительные постоянные, так что острый край пластины совпадает с S' . Для простоты ограничимся случаем, когда край S'' жестко закреплен.

Если $0 < \alpha < \frac{1}{3}$, то на S' можно задавать обычные условия жесткого закрепления

$$w|_{S'} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu}|_{S'} = 0.$$

Если $\frac{1}{3} \leq \alpha < \frac{2}{3}$, то на S' можно задать только одно условие. Можно потребовать в этом случае, чтобы на S' было $w = 0$.

Если $\alpha \geq \frac{2}{3}$, то условий на S' задавать нельзя. Во всех перечисленных случаях оператор в уравнении (3.88) положителен, поставленная здесь краевая задача имеет не более одного решения; если такое решение существует, то оно будет и решением также вариационной задачи о минимуме функционала (3.89) при тех же краевых условиях.

Если $\alpha \leq \frac{4}{3}$, то при упомянутых выше краевых условиях оператор (3.88) положительно определен и соответствующая вариационная задача имеет решение.

8. Изгиб сжатой пластины. Пусть пластина постоянной толщины $2h$ находится под действием нормальной нагрузки интенсивности $q(x, y)$ и напряжений T_{xx}, T_{xy}, T_{yy} , действующих в срединной плоскости пластины, причем объемные силы отсутствуют. Соответствующие главные напряжения в срединной плоскости обозначим через T_1 и T_2 . Уравнение

равновесия такой пластины имеет вид

$$\Delta^2 w - \frac{h}{D} \left(T_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{q}{h}; \quad (3.91)$$

краевые условия имеют по-прежнему вид (3.82)—(3.85) в зависимости от характера закрепления края. Как и выше, будем считать, что хотя бы на некоторой части края выполняется какое-либо из условий (3.82)—(3.83). Тогда можно указать два случая, когда оператор в левой части уравнения (3.91) положительно определен: либо $T_1 \geq 0$ и $T_2 \geq 0$, либо T_1 и T_2 достаточно малы по абсолютной величине. Оба случая можно объединить. Обозначим через T меньший из минимумов величин T_1 и T_2 в области Ω . Пусть A и B — постоянные, входящие в неравенства Пуанкаре и Фридрихса (§ 1, п. 5), и пусть $C = B^{-1}$, если имеется жестко закрепленный участок края, и $C = (1 - \sigma)A^{-1}$, если такого участка нет, но имеется, следовательно, участок края, который либо свободно оперт, либо упруго закреплен. Оператор (3.91) положительно определен, если $T > -\frac{CD}{h}$. Краевая задача для уравнения (3.91) в этом случае равносильна задаче о минимуме функционала

$$\iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{h}{D} \left[T_{xx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2T_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + T_{yy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - 2q\tau w \right\} dx dy + h \int_{S_3} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right)^2 ds \quad (3.92)$$

при краевых условиях, сформулированных в п. 7 для функционала (3.86).

9. Принцип минимума потенциальной энергии в статической теории упругости. Статическое упругое состояние тела описывается системой уравнений в частных производных, которая не подходит под тип, рассмотренный в п. 6: эта система не удовлетворяет неравенству (3.78). Тем не менее задачи теории упругости допускают применение вариационного метода.

Приводимые ниже соотношения верны для любой неоднородной и неизотропной упругой среды, если деформации и повороты малы, а напряжения подчинены линейному закону Гука.

Обозначим через \mathbf{u} (u_1, u_2, u_3) вектор упругих смещений. Составляющие тензоров напряжений и деформаций обозначим через $\tau_{ik} = \tau_{ki}$ и $2\varepsilon_{ik} = 2\varepsilon_{ki}$ соответственно; при этом

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (3.93)$$

Линейный закон Гука задается формулами

$$\tau_{ik} = \sum_{l, m=1}^3 c_{iklm} \varepsilon_{lm}; \quad (3.94)$$

коэффициенты c_{iklm} удовлетворяют соотношениям симметрии

$$c_{iklm} = c_{lmik} = c_{kilm},$$

так что различных коэффициентов не более 21.

Если \mathbf{K} (K_1, K_2, K_3) — вектор объемных сил, то напряжения удовлетворяют известным уравнениям равновесия

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + K_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Исключая напряжения с помощью соотношений (3.94), получаем уравнения равновесия в смещениях; их можно записать в виде одного векторного уравнения

$$\mathbf{A}\mathbf{u} \equiv - \sum_{l, k, i, m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (c_{iklm} \varepsilon_{lm}) \mathbf{x}_k^{(0)} = \mathbf{K}, \quad (3.95)$$

где $\mathbf{x}_k^{(0)}$ — орт оси x_k , а \mathbf{A} — дифференциальный оператор, который преобразует вектор упругих смещений в вектор объемных сил.

Основные краевые задачи теории упругости определяются следующими краевыми условиями, которые пока предполагаем однородными; как обычно, через S обозначена поверхность области Ω , занятой упругой средой.

1. Задача с заданными смещениями (первая задача):

$$\mathbf{u}|_S = 0. \quad (3.96)$$

II. Задача с заданными напряжениями (вторая задача):

$$t|_S = 0; \quad (3.97)$$

здесь t — вектор напряжений, действующий на элементарную площадку поверхности S . Если ν — внешняя нормаль к S , то по известной формуле Коши

$$t = \sum_{i, k=1}^3 \tau_{ik} \cos(\nu, x_i) x_k^{(0)}.$$

III. Задача о жестком контакте (третья задача):

$$u_{(\nu)}|_S = 0, \quad t_{(s)}|_S = 0. \quad (3.98)$$

Значки (ν) и (s) означают проектирование на нормаль и касательную плоскость к S .

IV. Смешанная (четвертая) задача: поверхность S разбита на части S_I, S_{II}, S_{III} , на каждой из которых выполнено соответствующее краевое условие задач I, II, III. Может случиться, что одна из частей S_I, S_{II}, S_{III} отсутствует.

Введем в рассмотрение вещественное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ векторных функций, абсолютные величины которых квадратично суммируемы в Ω . Если $u(u_1, u_2, u_3)$ и $\nu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — две такие функции, то по определению

$$(u, \nu) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 u_i \nu_i dx, \quad \|u\|^2 = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 u_i^2 dx = \int_{\Omega} |u|^2 dx.$$

Оператор A , входящий в левую часть уравнения (3.95), будем трактовать как оператор в $L_2(\Omega)$; допустим также, что $K \in L_2(\Omega)$, т. е. что существует интеграл

$$\int_{\Omega} |K|^2 dx.$$

В условиях любой из задач I—IV оператор A симметричен и имеет место тождество

$$(Au, u) = 2 \int_{\Omega} W dx, \quad (3.99)$$

где

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^3 \tau_{ik} \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{i, k, l, m=1}^3 c_{iklm} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm}$$

есть плотность потенциальной энергии деформации. Известно, что W — положительно определенная квадратичная форма от составляющих деформации, так что $W \geq 0$ и $(Au, u) \geq 0$; можно, если угодно, сказать, что в условиях задач I—IV оператор A неотрицателен.

Укажем несколько наиболее важных случаев положительной определенности оператора A .

1) В случае задачи I оператор A положительно определен в пространстве $L_2(\Omega)$.

2) В случае задачи II оператор A в $L_2(\Omega)$ не положительно определен и даже не положительный. Однако его можно рассматривать в некотором подпространстве, в котором он будет положительно определенным. При отсутствии поверхностных сил (условие (3.97)) главный вектор и главный момент объемных сил должны обращаться в нуль:

$$\int_{\Omega} K dx = 0, \quad \int_{\Omega} R \times K dx = 0, \quad (3.100)$$

где R — радиус-вектор точки x . С другой стороны, в условиях задачи II вектор смещений определяется только с точностью до произвольного малого жесткого смещения. Этот произвол можно устранить, потребовав, чтобы

$$\int_{\Omega} u dx = 0, \quad \int_{\Omega} R \times u dx = 0. \quad (3.100')$$

Равенства (3.100') и выделяют из пространства $L_2(\Omega)$ подпространство, в котором оператор A в условиях задачи II оказывается положительно определенным.

Ниже, при анализе задач III и IV, нам также придется иногда выделять подпространства положительной определенности оператора A . Каждый раз окажется, что K необходимо принадлежит такому подпространству, а u можно, подчинив его подходящим условиям, сделать элементом этого подпространства.

3) В задаче III оператор A положительно определен в $L_2(\Omega)$, если S не есть поверхность вращения.

Если S имеет одну ось вращения, скажем ось x_3 , то A положительно определен в подпространстве, которое

определяется неравенством

$$\int_{\Omega} (x_1 u_2 - x_2 u_1) dx = 0. \quad (3.101)$$

Если S имеет две оси вращения, то S есть сфера или совокупность двух концентрических сфер; поместим начало координат в центр этих сфер. В этом случае оператор A положительно определен в подпространстве, в котором

$$\int_{\Omega} R \times u dx = 0. \quad (3.102)$$

4) В задаче IV оператор A положительно определен в $L_2(\Omega)$, если имеется часть границы S_1 , на которой $u = 0$. Если часть S_1 отсутствует, то этот оператор также положительно определен в $L_2(\Omega)$, за исключением следующих случаев:

а) Поверхность S_{III} состоит из кусков цилиндрических поверхностей с параллельными образующими. Направим ось x_1 параллельно этим образующим; тогда оператор A будет положительно определенным в подпространстве, в котором

$$\int_{\Omega} u_1 dx = 0. \quad (3.103)$$

Может случиться, что цилиндрические куски, из которых состоит S_{III} , вырождаются в куски параллельных между собой плоскостей. Направим плоскость $x_2 = 0$ параллельно указанным плоскостям; оператор A положительно определенный в подпространстве $L_2(\Omega)$, в котором

$$\int_{\Omega} u_1 dx = \int_{\Omega} u_2 dx = 0. \quad (3.104)$$

б) S_{III} есть поверхность вращения (или состоит из нескольких кусков таких поверхностей) с одной осью x_3 или с двумя осями. В этом случае оператор A положительно определен в подпространстве, определяемом равенством (3.101) или (3.102) соответственно.

в) S_{III} состоит из одного или нескольких кусков винтовых поверхностей

$$x_1 = \rho \cos \omega, \quad x_2 = \rho \sin \omega, \quad x_3 = f(\rho) + h\omega,$$

где q и ω — параметры, определяющие положение точки на поверхности, h — постоянная. Оператор A положительно определен в подпространстве, в котором

$$\int_{\Omega} (x_1 u_2 - x_2 u_1 + h u_3) dx = 0. \quad (3.105)$$

Итак, во всех случаях оператор A положительно определен либо в самом пространстве $L_2(\Omega)$, либо в некотором его подпространстве. Сформулированные выше четыре задачи теории упругости сводятся к задаче о минимуме одного и того же интеграла

$$\int_{\Omega} (2W - 2Ku) dx$$

на множестве вектор-функций, принадлежащих соответствующему подпространству и удовлетворяющих главным краевым условиям соответствующей задачи.

Во всех перечисленных здесь задачах теории упругости энергетическая норма выражается формулой

$$|u|^2 = 2 \int_{\Omega} W dx = \int_{\Omega} \sum_{i, k, l, m=1}^3 c_{iklm} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm} dx;$$

если векторы u' и u'' оба принадлежат соответствующему пространству H_A , то их энергетическое произведение таково:

$$[u', u''] = \int_{\Omega} \sum_{i, k, l, m=1}^3 c_{iklm} \varepsilon'_{ik} \varepsilon''_{lm} dx;$$

здесь ε'_{ik} и ε''_{ik} — деформации, соответствующие смещениям u' и u'' .

В практически наиболее интересном случае изотропной среды коэффициенты c_{iklm} выражаются через так называемые постоянные Ламе λ и μ по формулам

$$c_{iiii} = \lambda + 2\mu, \quad c_{iikk} = \lambda, \quad c_{ikik} = 2\mu, \quad i \neq k,$$

остальные коэффициенты $c_{iklm} = 0$. В этом случае

$$W = \frac{1}{2} \left(\lambda \varepsilon^2 + 2\mu \sum_{i, k=1}^3 \varepsilon_{ik}^2 \right), \quad \varepsilon = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii};$$

выражения энергетической нормы и энергетического произведения принимают вид

$$|u|^2 = \int_{\Omega} \left(\lambda \varepsilon^2 + 2\mu \sum_{i, k=1}^3 \varepsilon_{ik}^2 \right) dx,$$

$$[u', u''] = \int_{\Omega} \left(\lambda \varepsilon' \varepsilon'' + 2\mu \sum_{i, k=1}^3 \varepsilon'_{ik} \varepsilon''_{ik} \right) dx.$$

В более употребительных обозначениях координат x, y, z

$$|u|^2 = \iiint_{\Omega} \left\{ \lambda \varepsilon^2 + 2\mu (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + \right.$$

$$\left. + 2\varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{xz}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2) \right\} dx dy dz,$$

$$[u', u''] = \iiint_{\Omega} \left\{ \lambda \varepsilon' \varepsilon'' + 2\mu (\varepsilon'_{xx} \varepsilon''_{xx} + \varepsilon'_{yy} \varepsilon''_{yy} + \varepsilon'_{zz} \varepsilon''_{zz} + \right.$$

$$\left. + 2\varepsilon'_{xy} \varepsilon''_{xy} + 2\varepsilon'_{xz} \varepsilon''_{xz} + 2\varepsilon'_{yz} \varepsilon''_{yz}) \right\} dx dy dz.$$

Укажем также вариационную задачу, соответствующую неоднородным краевым условиям. Ограничимся случаем смешанной задачи в предположении, что S_{III} отсутствует; как частные случаи получатся отсюда задачи I и II.

Пусть краевые условия имеют вид

$$u|_{S_I} = f, \quad t|_{S_{II}} = g. \quad (3.106)$$

Соответствующая вариационная задача заключается в нахождении минимума функционала

$$\int_{\Omega} (2W - 2Ku) dx - \int_{S_{II}} ug dS \quad (3.107)$$

на множестве векторных функций, удовлетворяющих условию

$$u|_{S_I} = f;$$

предполагается, что существует хотя бы одна такая функция, сообщающая интегралу

$$\int_{\Omega} W dx$$

конечное значение.

10. Краевые задачи для бесконечных областей. В случае бесконечной области Ω обычно встречающиеся дифференциальные операторы, такие, как взятый со знаком минус оператор Лапласа или оператор теории упругости (3.95), при обычных краевых условиях чаще всего оказываются положительными, но не положительно определенными. Если A — положительный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H , и f — данный элемент этого пространства, то уравнение $Au = f$, вообще говоря, неразрешимо, т. е. не имеет решения, принадлежащего пространству H . В частности, если A — дифференциальный оператор, H — пространство $L_2(\Omega)$ функций, квадратично суммируемых в Ω , и $f(x) \in L_2(\Omega)$, то уравнение $Au = f(x)$ далеко не всегда имеет решение, квадратично суммируемое в Ω . С другой стороны, требование существования такого решения нельзя считать оправданным. Так, если ищутся смещения в бесконечной области с закрепленной границей, то нет оснований ожидать, что на бесконечности смещения обращаются в нуль; тем более нет оснований ожидать, что они квадратично суммируемы. В то же время естественно выделить те случаи этой задачи, когда потенциальная энергия деформации, соответствующая искомому решению, остается конечной.

Обобщение приведенных для этой частной задачи соображений приводит в случае положительного оператора к тому, что в качестве обобщенного решения уравнения $Au = f$ рассматривается элемент u_0 (если он существует), принадлежащий энергетическому пространству H_A и реализующий минимум функционала

$$F(u) = |u|^2 - 2(u, f).$$

В п. 6 § 2 было указано необходимое и достаточное условие существования такого «решения с конечной энергией»; это условие состоит в том, чтобы скалярное произведение (u, f) было функционалом, ограниченным в энергетическом пространстве H_A . Здесь мы конкретизируем указанное условие для некоторых простых задач математической физики.

Будем говорить, что некоторый вектор $G(x)$ имеет обобщенную дивергенцию $\operatorname{div} G(x) = g(x)$, если для любой непрерывно дифференцируемой в области Ω функции $\varphi(x)$, равной нулю вблизи границы S области Ω , а также во всех

точках этой области, достаточно удаленных от начала координат, имеет место тождество

$$\int_{\Omega} \varphi(x) g(x) dx = - \int_{\Omega} \text{grad } \varphi \cdot G(x) dx.$$

Уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(x)$$

при краевом условии $u|_S = 0$ имеет решение с конечной энергией тогда и только тогда, когда $f(x)$ есть обобщенная дивергенция вектора, абсолютная величина которого квадратично суммируема. Если $F(x)$ — такой вектор, а u_0 — решение с конечной энергией, то

$$|u_0|^2 = \int_{\Omega} (\text{grad } u_0)^2 dx \leq \int_{\Omega} |F(x)|^2 dx,$$

где $|F|$ — абсолютная величина вектора F .

Тот же результат остается в силе и для более общего эллиптического уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f(x),$$

если его коэффициенты удовлетворяют неравенству

$$\mu_0 \sum_{i=1}^m t_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^m A_{ij}(x) t_i t_j \leq \mu_1 \sum_{i=1}^m t_i^2,$$

где μ_0 и μ_1 — некоторые положительные числа, t_i — любые вещественные числа и x — любая точка области Ω . Существование решения с конечной энергией в случае краевых условий второй или третьей задачи можно доказать, предполагая, что $f(x) = \text{div } F(x)$, где $F(x) \in L_2(\Omega)$ и, кроме того, $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \in L_2(\Omega)$.

Обратимся к уравнениям теории упругости. Пусть область Ω бесконечна. Допустим, что существуют такие положительные числа μ_0 и μ_1 , что для любых ε_{ik} верно неравенство

$$\mu_0 \sum_{i,k=1}^3 \varepsilon_{ik}^2 \leq W \leq \mu_1 \sum_{i,k=1}^3 \varepsilon_{ik}^2,$$

где W определяется формулой (3.99); это неравенство во всяком случае имеет место, если упругая среда однородна. Тогда уравнение (3.95) имеет, при краевом условии (3.96), решение с конечной энергией тогда и только тогда, когда существует симметричный тензор с квадратично суммируемыми в Ω составляющими s_{ij} такой, что вектор объемных сил K есть обобщенная дивергенция этого тензора, так что

$$K = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_i} x_j^{(0)},$$

где $x_j^{(0)}$ есть орт j -й координатной оси.

§ 4. Проблема собственных чисел

1. Основные понятия и теоремы. Уравнение

$$Au - \lambda Bu = 0, \quad (3.108)$$

в котором A и B —линейные операторы и λ —численный параметр, имеет очевидное решение $u = 0$, называемое *тривиальным*. Может, однако, случиться, что при некоторых значениях λ уравнение (3.108) имеет нетривиальное (т. е. отличное от тождественного нуля) решение. Такое решение называется *собственным элементом (собственной функцией)*, если u —функция одной или нескольких численных переменных) уравнения (3.108), а соответствующее значение λ —*собственным числом* этого уравнения. Если B —тождественный оператор, так что уравнение имеет вид

$$Au - \lambda u = 0, \quad (3.109)$$

то говорят также о собственных элементах и собственных числах оператора A . Совокупность собственных чисел уравнения или оператора называется его *собственным спектром*.

Если собственному числу λ соответствуют собственные элементы u_1, u_2, \dots, u_n уравнения (3.108), то их любая отличная от нулевого элемента линейная комбинация $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$, где c_1, c_2, \dots, c_n —произвольные постоянные, также есть собственный элемент того же уравнения, соответствующий тому же собственному числу λ . Таким образом, дополненное нулевым элементом множество

собственных элементов данного уравнения, соответствующих данному собственному числу, есть множество линейное.

В весьма широких условиях¹⁾ это множество есть подпространство, называемое *собственным подпространством* уравнения (3.108), соответствующим собственному числу λ ; размерность этого подпространства называется *кратностью* собственного числа.

К отысканию собственных чисел и собственных элементов обычно приводит разделение переменных в методе Фурье. Например, если уравнение имеет вид

$$AU - B \frac{\partial^k U}{\partial t^k} = 0,$$

где A и B — линейные операторы, не зависящие от времени, то, отыскивая решения вида $U(x, t) = u(x)f(t)$, приходим к уравнению (3.108) для неизвестной $u(x)$. К той же задаче о собственных числах и собственных функциях приводят и задачи устойчивости.

В прикладных вопросах наиболее важным является исследование собственного спектра симметричных и, особенно, положительно определенных операторов.

Перечислим основные свойства собственных чисел и собственных элементов таких операторов.

1) Собственные числа симметричного оператора вещественны.

2) Собственные элементы симметричного оператора, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

3) Если данному собственному числу соответствует несколько линейно независимых собственных элементов, то можно, применив к этим элементам процесс ортогонализации, сделать их ортогональными. Имея это в виду, будем впредь считать, что совокупность всех собственных элементов симметричного оператора образует ортогональную систему.

4) Симметричный оператор может иметь либо конечное, либо счетное множество собственных чисел, которые можно поэтому записать в виде конечной или счетной последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$. Разумеется, возможен и такой случай, когда симметричный оператор вовсе не имеет собственных чисел.

¹⁾ Если оператор $A - \lambda B$ замкнут.

5) Собственные элементы положительно определенного оператора ортогональны по энергии.

6) Собственные числа положительно определенного оператора положительны.

Если система собственных элементов самосопряженного оператора полна в гильбертовом пространстве, в котором действует данный оператор, а его собственные числа $\lambda_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, то говорят, что данный оператор *имеет дискретный спектр*.

Условимся в последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ собственных чисел оператора выписывать каждое собственное число столько раз, какова его кратность. При этом каждому собственному числу будет соответствовать только один линейно независимый собственный элемент, но среди собственных чисел могут встречаться равные.

Ниже на всем протяжении настоящего параграфа рассматриваются только положительно определенные операторы. Это обстоятельство оговариваться не будет.

Если A — положительно определенный оператор, то

$$\frac{(Au, u)}{(u, u)} \geq \gamma^2, \quad (3.110)$$

где γ^2 — положительная постоянная. В таком случае левая часть последнего неравенства имеет положительную точную нижнюю границу, которую мы обозначим через λ_1 .

Теорема 11. *Если существует элемент $u_1 \in D(A)$ такой, что*

$$\frac{(Au_1, u_1)}{(u_1, u_1)} = \lambda_1,$$

то λ_1 — наименьшее собственное число оператора A , а u_1 — соответствующий этому числу собственный элемент.

Теорема 12. *Пусть $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ суть n непосредственно следующих друг за другом первых собственных чисел оператора A и u_1, u_2, \dots, u_n — соответствующие им ортонормированные собственные элементы. Пусть λ_{n+1} есть точная нижняя граница тех значений, которые отношение (3.110) принимает на множестве элементов из $D(A)$, ортогональных к u_1, u_2, \dots, u_n . Если в этом множестве существует такой элемент u_{n+1} , что*

$$\frac{(Au_{n+1}, u_{n+1})}{(u_{n+1}, u_{n+1})} = \lambda_{n+1},$$

то u_{n+1} есть собственный элемент оператора A , соответствующий собственному числу λ_{n+1} . Это собственное число — ближайшее, следующее за λ_n .

Теорема 13. Пусть оператор таков, что всякое множество элементов, энергетические нормы которых ограничены в совокупности, компактно в метрике данного гильбертова пространства. Тогда спектр данного оператора дискретен и совокупность его собственных элементов полна по энергии (т. е. в соответствующем энергетическом пространстве).

Наименьшее собственное число оператора A равно минимуму величины $\|u\|_A^2$ при условии $\|u\|^2 = 1$. Если первые $n-1$ собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ и соответствующие им собственные элементы u_1, u_2, \dots, u_{n-1} известны, то ближайшее следующее собственное число λ_n можно определить как минимум величины $\|u\|_A^2$ при условиях

$$\|u\|^2 = 1, \quad (u, u_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

2. Метод Релея — Ритца. Пусть оператор A имеет дискретный спектр. Для определения собственных чисел этого оператора можно поступить так. Зададим последовательность координатных элементов $\varphi_n \in H_A$ ($n = 1, 2, \dots$), где H_A — соответствующее энергетическое пространство; координатные элементы подчиним тем же требованиям, что и в п. 3 § 2 настоящей главы. Составим уравнение

$$\begin{vmatrix} [\varphi_1, \varphi_1] - \lambda & [\varphi_2, \varphi_1] - \lambda & \dots & [\varphi_n, \varphi_1] - \lambda \\ [\varphi_1, \varphi_2] - \lambda & [\varphi_2, \varphi_2] - \lambda & \dots & [\varphi_n, \varphi_2] - \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\varphi_1, \varphi_n] - \lambda & [\varphi_2, \varphi_n] - \lambda & \dots & [\varphi_n, \varphi_n] - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.111)$$

Это уравнение степени n ; его корни все положительны. Расположим их в порядке возрастания: $\lambda_1^{(n)} \leq \lambda_2^{(n)} \leq \dots \leq \lambda_n^{(n)}$. Каждый из этих корней является приближенным значением сверху для соответствующего собственного числа данного оператора, так что $\lambda_p^{(n)} \geq \lambda_p$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_p^{(n)} = \lambda_p$. Следует иметь в виду, что с возрастанием p точность приближенного равенства $\lambda \approx \lambda_p^{(n)}$ ухудшается.

Приближенные значения нормированных собственных элементов имеют вид

$$u_p^{(n)} = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k; \quad (3.112)$$

коэффициенты a_{ik} определяются из уравнений

$$\sum_{k=1}^n a_k \{ [\varphi_j, \varphi_k] - \lambda_p^{(n)} (\varphi_j, \varphi_k) \} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (3.113)$$

$$\sum_{j,k=1}^n (\varphi_j, \varphi_k) a_j a_k = 1. \quad (3.114)$$

Определитель системы (3.113) равен нулю, и решение этой системы находится с точностью до произвольного множителя, значение которого определяется уравнением (3.114).

Вид уравнения (3.111) несколько упрощается, если координатные элементы ортонормированы либо в метрике данного гильбертова пространства, либо в метрике энергетического пространства. В первом случае

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases}$$

и уравнение (3.111) принимает вид

$$\begin{vmatrix} [\varphi_1, \varphi_1] - \lambda & [\varphi_2, \varphi_1] & \dots & [\varphi_n, \varphi_1] \\ [\varphi_1, \varphi_2] & [\varphi_2, \varphi_2] - \lambda & \dots & [\varphi_n, \varphi_2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\varphi_1, \varphi_n] & [\varphi_2, \varphi_n] & \dots & [\varphi_n, \varphi_n] - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

во втором случае

$$[\varphi_j, \varphi_k] = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases}$$

и уравнение (3.114) приводится к виду

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda (\varphi_1, \varphi_1) & -\lambda (\varphi_2, \varphi_1) & \dots & -\lambda (\varphi_n, \varphi_1) \\ -\lambda (\varphi_1, \varphi_2) & 1 - \lambda (\varphi_2, \varphi_2) & \dots & -\lambda (\varphi_n, \varphi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda (\varphi_1, \varphi_n) & -\lambda (\varphi_2, \varphi_n) & \dots & 1 - \lambda (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Если координатные элементы принадлежат не только энергетическому пространству, но еще и области определения данного оператора¹⁾, то уравнение (3.111) можно представить также и в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda (\varphi_1, \varphi_1) & (A\varphi_2, \varphi_1) - \lambda (\varphi_2, \varphi_1) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_1) - \lambda (\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2) - \lambda (\varphi_1, \varphi_2) & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda (\varphi_2, \varphi_2) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_2) - \lambda (\varphi_n, \varphi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A\varphi_1, \varphi_n) - \lambda (\varphi_1, \varphi_n) & (A\varphi_2, \varphi_n) - \lambda (\varphi_2, \varphi_n) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0.$$

3. Уравнения вида $Au - \lambda Bu = 0$. Будем предполагать, что оба оператора A и B положительно определенные и что область определения оператора B шире соответствующей области оператора A , так что $D(A) \subset D(B)$. Для всякого элемента из области $D(A)$ можно тогда двояко определять энергию, связывая ее либо с оператором A , либо с оператором B . Соответственно этому будем говорить об «энергии оператора A » или «энергии оператора B ».

Теорема 14. *Собственные числа уравнения (3.108) положительны.*

Теорема 15. *Собственные элементы уравнения (3.108) можно сделать ортонормированными по энергии оператора B ; при этом они также ортогональны по энергии оператора A .*

Теорема 16. *Если существует элемент u_1 такой, что*

$$\frac{(Au_1, u_1)}{(Bu_1, u_1)} = \lambda_1,$$

где

$$\lambda_1 = \text{Inf} \frac{(Au, u)}{(Bu, u)},$$

то λ_1 есть наименьшее собственное число уравнения (3.108), а u_1 — соответствующий этому числу собственный элемент.

Теорема 17. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ суть следующие в порядке возрастания n первых собственных чисел уравнения (3.108), а u_1, u_2, \dots, u_n — соответствующие им собственные элементы. Пусть λ_{n+1} есть точная нижняя*

¹⁾ Если оператор дифференциальный, то это означает, что координатные функции имеют производные тех порядков, которые входят в уравнение, и что эти координатные функции удовлетворяют всем, в том числе и естественным, краевым условиям задачи.

граница функционала

$$\frac{(Au, u)}{(u, u)}$$

при условиях

$$(Bu, u_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Если существует удовлетворяющий этим условиям элемент u_{n+1} такой, что

$$\frac{(Au_{n+1}, u_{n+1})}{(Bu_{n+1}, u_{n+1})} = \lambda_{n+1},$$

то λ_{n+1} есть собственное число уравнения (3.108), ближайшее следующее за λ_n , а u_{n+1} есть соответствующий собственный элемент.

Теорема 18. Пусть операторы A и B таковы, что всякое множество элементов, у которых нормы энергии по оператору A ограничены в совокупности, компактно в норме энергии оператора B . Тогда уравнение (3.108) имеет бесконечное множество собственных чисел $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, причем $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, а соответствующие собственные элементы образуют систему, полную как по энергии оператора A , так и по энергии оператора B .

Наименьшее собственное число уравнения (3.108) равно минимуму величины $|u|_A^2$ при дополнительном условии $|u|_B^2 = 1$; через $|u|_A$ и $|u|_B$ мы обозначаем энергетические нормы элемента u в пространствах H_A и H_B соответственно. Точно так же символы $[u, v]_A$ и $[u, v]_B$ будут обозначать энергетические произведения элементов u и v в соответствующих пространствах. Если известны первые $n-1$ собственных чисел и соответствующие им собственные элементы u_1, u_2, \dots, u_{n-1} , то n -е собственное число есть минимум той же величины $|u|_A^2$ при дополнительных условиях $|u|_B^2 = 1$, $[u, u_k]_B = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$.

Приближенные значения первых n собственных чисел уравнения (3.108) можно найти как корни уравнения

$$\begin{vmatrix} [\varphi_1, \varphi_1]_A - \lambda [\varphi_1, \varphi_1]_B & [\varphi_2, \varphi_1]_A - \lambda [\varphi_2, \varphi_1]_B & \dots & [\varphi_n, \varphi_1]_A - \lambda [\varphi_n, \varphi_1]_B \\ [\varphi_1, \varphi_2]_A - \lambda [\varphi_1, \varphi_2]_B & [\varphi_2, \varphi_2]_A - \lambda [\varphi_2, \varphi_2]_B & \dots & [\varphi_n, \varphi_2]_A - \lambda [\varphi_n, \varphi_2]_B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\varphi_1, \varphi_n]_A - \lambda [\varphi_1, \varphi_n]_B & [\varphi_2, \varphi_n]_A - \lambda [\varphi_2, \varphi_n]_B & \dots & [\varphi_n, \varphi_n]_A - \lambda [\varphi_n, \varphi_n]_B \end{vmatrix} = 0; \quad (3.115)$$

координатные элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ должны удовлетворять следующим условиям: 1) $\varphi_n \in H_A$; 2) взятые в любом конечном числе элементы φ_n линейно независимы; 3) совокупность координатных элементов полна в H_A .

Если $\varphi_n \in D(A)$, то уравнению (3.115) можно придать вид

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda (B\varphi_1, \varphi_1) & (A\varphi_2, \varphi_1) - \lambda (B\varphi_2, \varphi_1) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_1) - \lambda (B\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2) - \lambda (B\varphi_1, \varphi_2) & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda (B\varphi_2, \varphi_2) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_2) - \lambda (B\varphi_n, \varphi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A\varphi_1, \varphi_n) - \lambda (B\varphi_1, \varphi_n) & (A\varphi_2, \varphi_n) - \lambda (B\varphi_2, \varphi_n) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda (B\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0.$$

4. Спектр обыкновенного дифференциального оператора.

Оператор

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x) u \quad (3.116)$$

при краевых условиях

$$\alpha u'(a) - \beta u(a) = 0, \quad \gamma u'(b) + \delta u(b) = 0 \quad (3.117)$$

имеет дискретный спектр, причем все собственные числа положительны, если выполнены следующие условия: 1) $p(x) \geq p_0$, где p_0 — положительная постоянная; 2) $q(x) \geq 0$; 3) постоянные $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ неотрицательны, и хотя бы одна из постоянных β и δ не равна нулю.

Спектр оператора (3.116) остается дискретным и тогда, когда числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ какие угодно, а $q(x)$, не будучи обязательно неотрицательным, удовлетворяет неравенству $q(x) \geq -N$, где N — неотрицательная постоянная. При этом может случиться, что среди собственных чисел окажется конечное число отрицательных или равных нулю.

Наименьшее собственное число оператора (3.116) при краевых условиях (3.117) равно минимуму функционала

$$\int_a^b \left[p(x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + q(x) u^2(x) \right] dx + \frac{\beta}{\alpha} p(a) u^2(a) + \frac{\delta}{\gamma} p(b) u^2(b) \quad (3.118)$$

при дополнительном условии

$$\int_a^b u^2(x) dx = 1. \quad (3.119)$$

При этом, если $\alpha \neq 0$ и $\gamma \neq 0$, то условия (3.117) естественные. Если же, например, $\alpha = 0$, то в функционале (3.118) следует опустить член, содержащий α , а функции $u(x)$ в этом функционале следует подчинить не только условию (3.119), но еще и главному условию $u(a) = 0$. Если $\alpha = \gamma = 0$, наименьшее собственное число равно минимуму функционала

$$\int_a^b [p(x) \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)u^2(x)] dx$$

при дополнительных условиях (3.119) и (3.117); последние при этом имеют вид $u(a) = u(b) = 0$.

Аналогичные заключения справедливы и для собственных чисел уравнения

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u - \lambda r(x)u = 0,$$

если $r(x)$ заключено между некоторыми положительными числами r_0 и r_1 . На этот раз наименьшее собственное число равно минимуму функционала (3.118) при дополнительном условии

$$\int_a^b r(x)u^2(x) dx = 1$$

и при главных условиях (3.117), если таковые имеются.

Теперь рассмотрим случай, когда $p(x)$ может обращаться в нуль. Допустим, что $p(a) = 0$ и $p(x) > 0$ при $x > a$. Примем, что функция $u(x)$ удовлетворяет краевым условиям, упомянутым в п. 1 § 3. Оператор (3.116) при этих краевых условиях имеет дискретный спектр, если сходится интеграл

$$\int_a^b \frac{(x-a) dx}{p(x)}.$$

В частности, если $C_1(x-a)^\alpha \leq p(x) \leq C_2(x-a)^\alpha$, где C_1 и C_2 — положительные постоянные, то спектр оператора (3.116) дискретен при $\alpha < 2$ и недискретен при $\alpha \geq 2$.

Рассмотрим уравнение порядка выше второго:

$$L_{2n}u - \lambda L_{2s}u = 0, \quad (3.120)$$

где $n > s$ и

$$L_{2n}u = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} \right),$$

$$L_{2s}u = \sum_{k=0}^s (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(q_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} \right),$$

а функция $u(x)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\left. \begin{aligned} u(a) = u'(a) = \dots = u^{(n-1)}(a) = 0, \\ u(b) = u'(b) = \dots = u^{(n-1)}(b) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.121)$$

Допустим, что $p_n(x) \geq C$, где C — положительная постоянная. Допустим также, что при краевых условиях (3.121) оба оператора L_{2n} и L_{2s} положительно определенные; для этого достаточно (но не необходимо), чтобы

$$p_k(x) \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

и

$$q_k(x) \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s),$$

причем хотя бы одна из функций $q_k(x) \geq C'$, где C' — положительная постоянная. При этих условиях спектр уравнения (3.120) дискретный и все его собственные числа положительны. Наименьшее собственное число есть минимум функционала

$$\int_a^b \sum_{k=0}^n p_k(x) \left(\frac{d^k u}{dx^k} \right)^2 dx \quad (3.122)$$

при дополнительном условии

$$\int_a^b \sum_{k=0}^s q_k(x) \left(\frac{d^k u}{dx^k} \right)^2 dx$$

и краевых условиях (3.121).

Пусть теперь $p_m(a) = 0$, но $p_m(x) > 0$ при $x > a$. Более определенно, допустим, что $C_1(x-a)^\alpha \leq p_m(x) \leq C_2(x-a)^\alpha$, C_1 и C_2 — положительные постоянные. Рассмотрим уравнение $L_{2n}u - \lambda u = 0$ при краевых условиях (3.51) и (3.54). Спектр этого уравнения дискретен при $\alpha < 2n$ и недискретен при

$\alpha \geq 2n$. Если $\alpha < 2n$, то наименьшее собственное число равно минимуму функционала (3.122) при дополнительном условии (3.119) и при краевых условиях (3.51) и (3.54).

Пример 11. По методу Релея—Ритца найдем приближенное значение наименьшего собственного числа оператора

$$-\frac{d}{dx} \left(\sqrt{1+x} \frac{du}{dx} \right), \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (3.123)$$

В качестве координатных возьмем функции

$$\varphi_k(x) = (1-x)x^k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Ограничимся тремя первыми координатными функциями. Уравнение (3.115) в данном случае имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0,404757774 - \frac{1}{30} \lambda & 0,216156130 - \frac{1}{60} \lambda & 0,135002282 - \frac{1}{105} \lambda \\ 0,216156130 - \frac{1}{60} \lambda & 0,510789821 - \frac{1}{105} \lambda & 0,675363337 - \frac{1}{168} \lambda \\ 0,135002282 - \frac{1}{105} \lambda & 0,675363337 - \frac{1}{168} \lambda & 1,023822057 - \frac{1}{252} \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение решалось по методу Ньютона; для наименьшего собственного числа оператора (3.123) было получено значение с избытком

$$\lambda_1^{(s)} = 12,12255. \quad (3.124)$$

5. Спектр эллиптического оператора. Рассмотрим само-сопряженное уравнение второго порядка

$$-\sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + C(x)u - \lambda r(x)u = 0 \quad (3.125)$$

при каком-либо из краевых условий (3.62)—(3.64). Примем следующие допущения: 1) в рассматриваемой конечной области Ω оператор

$$-\sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)$$

эллиптический невырождающийся, так что имеет место неравенство

$$\sum_{j,k=1}^m A_{jk} t_j t_k \geq \mu_0 \sum_{j=1}^m t_j^2, \quad \mu_0 = \text{const} > 0;$$

2) $C(x) \geq a$, где a — постоянная какого угодно знака; 3) $r_0 \leq r(x) \leq r_1$, где r_0 и r_1 — положительные постоянные; 4) в случае условия (3.63) или (3.64) область Ω удовлетворяет условиям п. 5 § 1. При перечисленных условиях оператор (3.125) имеет дискретный спектр. При этом все собственные числа будут положительными, если выполнены следующие требования:

а) В случае краевых условий (3.62) или (3.64) достаточно, чтобы $C(x) \geq 0$.

Это требование можно сразу же ослабить следующим образом. Пусть λ_1 — наименьшее собственное число уравнения

$$-\sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - \lambda r(x) u = 0$$

при соответствующем одном краевом условии (3.62) или (3.64); как только что было сказано, $\lambda_1 > 0$. Собственные числа уравнения (3.123) при том же краевом условии положительны, если $C(x) > -\lambda_1$.

б) В случае краевого условия (3.63) собственные числа уравнения (3.123) положительны, если коэффициент $C(x)$ неотрицателен и отличен от тождественного нуля.

Наименьшее собственное число уравнения (3.125) при краевом условии (3.62) равно минимуму функционала

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{j,k=1}^m A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2 \right\} dx$$

на множестве функций, удовлетворяющих условию (3.62) и дополнительному условию

$$\int_{\Omega} ru^2 dx = 1. \quad (3.126)$$

В случае условия (3.64) (его частным случаем при $\sigma \equiv 0$ является условие (3.63)) наименьшее собственное число уравнения (3.125) равно минимуму функционала

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{j,k=1}^m A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2 \right\} + \int_{\Sigma} \sigma u^2 dS$$

при дополнительном условии (3.126).

Для задачи Неймана (условие (3.63)) в случае, когда $C(x) \equiv 0$, наименьшее собственное число равно нулю; ему соответствует одна линейно независимая собственная функция $u \equiv \text{const}$. Наименьшее положительное собственное число задачи Неймана в этом случае равно минимуму интеграла

$$\int_{\Omega} \sum_{j, k=1}^m A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx$$

при дополнительных условиях (3.126) и

$$(u, 1) = \int_{\Omega} u dx = 0.$$

Рассмотрим теперь уравнение более высокого порядка:

$$L_{2n}u - \lambda L_{2s}u = 0, \quad n > s, \quad (3.127)$$

где L_{2n} определяется формулами (3.77), а L_{2s} — аналогичными формулами

$$L_{2s}u = \sum_{k=0}^s B_k u,$$

$$B_k u = \sum \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \left(B_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}} \right).$$

Уравнение (3.127) будем рассматривать при краевых условиях (3.79). Примем следующие допущения:

- 1) выполнено неравенство (3.78), так что оператор L_{2n} эллиптический невырождающийся;
- 2) коэффициенты оператора L_{2n} ограничены;
- 3) оператор L_{2s} положительно определен.

Тогда уравнение (3.127) имеет дискретный спектр; если, кроме того, при условиях (3.79) оператор L_{2n} положительно определен, то собственные числа уравнения (3.127) положительны. Наименьшее собственное число равно минимуму функционала

$$(L_{2n}u, u) = \int_{\Omega} \sum_{k=0}^n \sum A_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k} \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}} dx$$

на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям (3.79) и дополнительному условию

$$(L_{2s}u, u) = \int_{\Omega} \sum_{k=0}^s \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} B_{i_1, i_2, \dots, i_k}^k \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}} dx = 1.$$

Особо рассмотрим задачу о частотах собственных изгибных колебаний тонкой упругой пластины. Если толщина пластинки постоянная, то эти частоты пропорциональны собственным числам бигармонического оператора

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

при одном из краевых условий, рассмотренных в п. 6 § 3. Допустим, что имеет место общий случай, когда край пластины разбит на четыре части, S_1, S_2, S_3, S_4 , на каждой из которых выполнено соответственно условие (3.82), (3.83), (3.84), (3.85). Спектр бигармонического оператора в этих условиях дискретен.

Наименьшее собственное число бигармонического оператора в этом случае равно минимуму функционала

$$\iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy + k \int_{S_3} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right)^2 ds; \quad (3.128)$$

этот минимум ищется на множестве функций, удовлетворяющих равенству

$$\iint_{\Omega} w^2 dx dy = 1 \quad (3.129)$$

и краевым условиям

$$u|_{S_1+S_2+S_3=0}, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{S_1} = 0. \quad (3.130)$$

Если весь край пластины жестко закреплен, то наименьшее собственное число бигармонического оператора равно также

минимуму интеграла

$$\iint_{\Omega} (\Delta w)^2 dx dy,$$

где функции $w(x)$ удовлетворяют равенству (3.129) и крайевым условиям $w|_S = 0$, $\frac{\partial w}{\partial \nu}|_S = 0$.

n -е собственное число λ_n бигармонического оператора связано с n -й собственной частотой ω_n колеблющейся пластины соотношением

$$\lambda_n = \frac{\gamma \omega_n^2}{D},$$

где γ — плотность материала пластины и $D = Eh^2/12(1 - \sigma^2)$ — коэффициент жесткости пластины на изгиб.

Если толщина $2h$ пластины переменная, то уравнение собственных колебаний пластины имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \sigma \frac{\partial}{\partial y^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = \lambda h w, \end{aligned} \quad (3.131)$$

где на этот раз параметр λ связан с частотой ω собственных колебаний пластины соотношением

$$\lambda = \frac{12(1 - \sigma^2)\gamma}{E} \omega^2.$$

Наименьшее собственное значение λ_1 равно минимуму функционала

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} h^3 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2(1 - \sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + k \int_{S_3} h^3 \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right)^2 ds \end{aligned} \quad (3.132)$$

при дополнительном условии

$$\iint_{\Omega} h w^2 dx dy = 1 \quad (3.133)$$

и краевых условиях (3.130).

6. Устойчивость сжатой пластины. Пусть напряжения в пластине пропорциональны некоторому параметру λ и, следовательно, имеют вид λT_{xx} , λT_{xy} , λT_{yy} . Допустим еще, что отсутствует участок границы, свободный от напряжений. Для простоты примем также, что толщина пластины постоянная. Если хотя бы в одной точке пластины по крайней мере одно из главных напряжений, определяемых полем напряжений T_{xx} , T_{xy} , T_{yy} , сжимающее, то при некоторых положительных значениях λ пластина потеряет устойчивость. Эти значения λ («критические значения») и соответствующие им прогибы w связаны уравнением

$$\Delta^2 w - \frac{\lambda h}{D} \left(T_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0;$$

кроме того, w удовлетворяет соответствующим условиям закрепления. Наименьшее критическое значение равно минимуму функционала (3.128) при краевых условиях (3.130) и дополнительном условии

$$-\iint_{\Omega} \left[T_{xx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2T_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + T_{yy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 1.$$

7. Спектр вырождающегося эллиптического уравнения. Ограничимся здесь в существенном уравнениями второго порядка; кроме того, рассмотрим спектр собственных частот пластины с острым краем. В обоих случаях мы предполагаем выполненными те краевые условия, которые указаны в п. 4 и п. 6 § 3.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\omega(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \lambda u = 0 \quad (3.134)$$

при только что упомянутых краевых условиях.

Спектр уравнения (3.134) при этих условиях дискретен, если $\Phi(x, y) > 0$ при $y > 0$, $\omega(x, y) = y^\alpha \omega_1(x, y)$, $\omega_1(x, y) \geq k$, где k — положительная постоянная, и $0 \leq \alpha < 2$. Наименьшее собственное число уравнения (3.134) равно, как и в случае невырожденного уравнения, минимуму интеграла

$$\iint_{\Omega} \left[\Phi(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \omega(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям задачи и, кроме того, равенству

$$\iint_{\Omega} u^2 dx dy = 1.$$

Если $\alpha \geq 2$, то спектр уравнения (3.134) недискретен.

Спектр собственных частот пластины переменной толщины определяется уравнением (3.131) и соответствующими краевыми условиями. Допустим, что $C_1 y^\alpha \leq h(x, y) \leq C_2 y^\alpha$, где C_1, C_2, α — положительные постоянные. Тогда спектр собственных частот пластины дискретен, если $\alpha < 2$, и недискретен в противном случае. Как и выше, наименьшее собственное число есть минимум функционала (3.132) на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям задачи и дополнительному условию (3.133).

Заметим еще, что спектр оператора в левой части уравнения (3.131), т. е. спектр уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \sigma \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = \lambda w, \end{aligned}$$

дискретен только при значениях $\alpha < \frac{4}{3}$.

8. Собственные колебания упругих тел. При краевых условиях, перечисленных в п. 8 § 3, оператор

$$Au = - \sum_{i, k, l, m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (c_{iklm} \varepsilon_{lm}) x_k^{(0)}$$

имеет дискретный спектр. Собственные числа оператора A положительны в тех случаях (см. п. 8 § 3), когда этот оператор положительно определенный; в остальных случаях несколько первых собственных чисел равны нулю. Наименьшее собственное число оператора A равно минимуму удвоенной потенциальной энергии деформации упругого тела

$$2 \int_{\Omega} W dx = \int_{\Omega} \sum_{i, k, l, m=1}^3 c_{iklm} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm} dx$$

при главных краевых условиях задачи и дополнительном условии

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 u_i^2 dx = 1.$$

Собственные числа λ_n оператора A связаны с собственными частотами ω_n упругого тела соотношением $\lambda_n = \gamma \omega_n^2$, где γ — плотность упругой среды, которую мы считаем постоянной.

Пример 12. Найдем наименьшую собственную частоту колебаний однородного и изотропного упругого круглого цилиндра со свободной границей; ограничимся случаем радиально-симметричных колебаний. Пусть λ и μ — постоянные Ламе, R — радиус, h — высота цилиндра. Введем цилиндрические координаты ϱ , ϑ , z и обозначим через u_ϱ и u_z составляющие вектора смещений \mathbf{u} по направлениям ϱ и z соответственно; составляющая u_ϑ в направлении ϑ равна нулю в силу радиальной симметрии смещений. В нашем случае

$$2 \int_{\Omega} W dx = 2\pi \int_0^R \int_0^h \left\{ \lambda \left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial \varrho} + \frac{u_\varrho}{\varrho} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\mu \left[\left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial \varrho} \right)^2 + \frac{u_\varrho^2}{\varrho^2} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \varrho} \right)^2 \right\} \varrho d\varrho dz.$$

Наименьшая собственная частота ω_1 колебаний цилиндра связана с наименьшим положительным собственным числом задачи κ_1 соотношением $\kappa_1 = \gamma \omega_1^2$; однако κ_1 не есть наименьшее собственное число задачи — это последнее равно нулю, и соответствующие ему собственные элементы суть малые жесткие смещения. Поэтому κ_1 можно построить как минимум написанного выше интеграла при условиях

$$2\pi \int_0^R \int_0^h (u_\varrho^2 + u_z^2) \varrho d\varrho dz = 1$$

и

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} dx = 2\pi \int_0^R \int_0^h \mathbf{u} \varrho d\varrho dz = 0, \\ \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{u} dx = 2\pi \int_0^R \int_0^h \mathbf{r} \times \mathbf{u} \varrho d\varrho dz = 0,$$

из которых последние два равносильны условиям ортогональности вектора \mathbf{u} к вектору произвольного жесткого смещения.

Краевые условия задачи естественные, и вектор \mathbf{u} можно им не подчинять.

Из соображений симметрии ясно, что $u_\varrho = 0$ при $\varrho = 0$. Применяя метод Релея — Ритца, возьмем $\frac{u_\varrho}{\varrho}$ и u_z в виде полиномов, расположенных по степеням ϱ^2 и z ; ограничиваясь выписанными ниже

членами, будем иметь:

$$u_\rho = \varrho (\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 \varrho^2 + \alpha_3 z^2),$$

$$u_z = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 \varrho^2 + \beta_3 z^2.$$

Упомянутые выше условия ортогональности приводят к соотношениям:

$$\alpha_0 = -3 \left(\frac{\alpha_1 h}{6} + \frac{\alpha_2 R^2}{5} + \frac{\alpha_3 h^2}{9} \right),$$

$$\beta_0 = - \left(\frac{\beta_1 h}{2} + \frac{\beta_2 R^2}{2} + \frac{\beta_3 h^2}{3} \right), \quad \alpha_1 = \frac{6}{h^2} \left(\frac{\beta_2 R^2}{5} - \frac{\alpha_3 h^3}{6} \right).$$

Исключив коэффициенты α_0 , β_0 , α_1 , убедимся, что u_ρ и u_z суть составляющие следующего вектора:

$$u = \sum_{k=1}^5 a_k \Psi_k,$$

где

$$a_1 = \beta_1, \quad a_2 = \alpha_2, \quad a_3 = \beta_2, \quad a_4 = \alpha_3, \quad a_5 = \beta_3$$

и

$$\Psi_1 = \left(0; z - \frac{h}{2} \right), \quad \Psi_2 = \left(\varrho^3 - \frac{3R^2}{5} \varrho; 0 \right),$$

$$\Psi_3 = \left(\frac{6R^2}{5h^2} \varrho z - \frac{3R^2}{5h} \varrho; \varrho^2 - \frac{R^2}{2} \right),$$

$$\Psi_4 = \left(\frac{h^2}{6} \varrho - h \varrho z + z^2 \varrho; 0 \right), \quad \Psi_5 = \left(0; z^2 - \frac{h^2}{3} \right).$$

Основное гильбертово пространство задачи в нашем случае есть пространство квадратично суммируемых по области цилиндра радиально-симметричных векторных функций; в этом пространстве скалярное произведение элементов Φ и Ψ определяется формулой

$$(\Phi, \Psi) = 2\pi \int_0^R \int_0^h (\varphi_\rho \psi_\rho + \varphi_z \psi_z) \varrho d\varrho dz;$$

энергетическое произведение в нашем случае имеет вид

$$\begin{aligned} |\Phi, \Psi| = 2\pi \int_0^R \int_0^h \left\{ \lambda \left(\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \varrho} + \frac{\varphi_\rho}{\varrho} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \psi_\rho}{\partial \varrho} + \frac{\psi_\rho}{\varrho} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. + 2\mu \left(\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \varrho} \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \varrho} + \frac{\varphi_\rho \psi_\rho}{\varrho^2} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. + \mu \left(\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial \varrho} \right) \left(\frac{\partial \psi_\rho}{\partial z} + \frac{\partial \psi_z}{\partial \varrho} \right) \right\} \varrho d\varrho dz. \end{aligned}$$

Теперь можно составить уравнение (3.115); мы только заменим в нем обозначение λ на κ , так как у нас λ уже означает одну из

постоянных Ламе. В данном случае уравнение (3.115) 5-й степени; оно распадается на следующие три:

$$\begin{aligned} & \frac{(\lambda + \mu)R^2h^5}{90} + \frac{\mu R^4h^3}{12} - \frac{R^4h^5}{720} \kappa = 0, \\ & \left| \begin{array}{cc} \frac{(\lambda + 2\mu)R^2h}{2} - \frac{R^2h^3}{24} \kappa & \frac{2\lambda R^4h}{5} \\ \frac{2\lambda R^4h}{5} & \frac{(74\lambda + 124\mu)R^6h}{75} - \frac{3R^8h}{200} \kappa \end{array} \right| = 0, \\ & \left| \begin{array}{cc} \frac{6(\lambda + \mu)R^6}{25h} + \frac{\mu R^4h}{4} \left(\frac{6R^2}{5h^2} + 2 \right) - \left(\frac{3R^3}{100h} + \frac{R^6h}{24} \right) \kappa & \lambda R^4h \\ \lambda R^4h & \frac{(\lambda + 2\mu)R^2h^3}{6} - \frac{R^2h^5}{360} \kappa \end{array} \right| = 0. \end{aligned}$$

Чтобы сделать вычисления определенными, возьмем случай $\lambda = 2\mu$, что соответствует значению постоянной Пуассона $\sigma = \frac{1}{3}$. Далее положим $R = 2$, $h = 4$, так что осевое сечение цилиндра — квадрат. Наименьший из всех корней написанных выше уравнений равен $\kappa_1 = 2,722808\mu$, откуда

$$\omega_1 = 0,1650051 \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}.$$

9. Более общие условия положительной определенности дифференциальных операторов. Ограничимся одним примером — распространение на другие случаи не вызовет затруднений. В п. 3 § 3 было указано, что при краевом условии $u|_S = 0$ невырождающийся эллиптический оператор

$$Au = - \sum_{j, k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + C(x)u$$

будет положительно определенным, если $C(x) \geq 0$. Это условие, однако, не необходимо. При краевом условии $u|_S = 0$ наименьшее собственное число λ_1 оператора

$$A_1 u = - \sum_{j, k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

положительно. Но

$$\lambda_1 = \text{Inf} \frac{(A_1 u, u)}{(u, u)} = \text{Inf} \frac{(A_1 u, u)}{\|u\|^2},$$

и для любой функции $u \in D(A_1)$, т. е. для функции $u \in W_2^1(\Omega)$, равной нулю на S ,

$$(A_1 u, u) \geq \lambda_1 \|u\|^2.$$

Теперь очевидно, что оператор A будет положительно определенным, если $C(x) > -\mu$, где постоянная $\mu < \lambda_1$. Действительно,

$$(Au, u) = (A_1u, u) + (Cu, u) > \lambda_1(u, u) - \mu(u, u) = (\lambda_1 - \mu) \|u\|^2.$$

Пример 13. Пусть

$$Au = -\Delta u - a(x^2 + y^2)u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - a(x^2 + y^2)u, \quad u|_S = 0,$$

где a —положительная постоянная и область Ω есть квадрат $0 \leq x, y \leq 1$; как всегда, S означает границу этого квадрата. В данном случае $A_1u = -\Delta u$, $u|_S = 0$. Собственные числа первой краевой задачи для оператора Лапласа в единичном квадрате определяются хорошо известной формулой $\lambda_{mn} = \pi^2(m^2 + n^2)$ ($m, n = 1, 2, \dots$); наименьшее из них $\lambda_1 = \lambda_{11} = 2\pi^2$. В квадрате Ω , очевидно, $-a(x^2 + y^2) \geq -2a$, и оператор A будет положительно определенным, если $-2a > -2\pi^2$, или $a < \pi^2$.

10. Минимаксимальный принцип. Пусть A —положительно определенный оператор с дискретным спектром, и пусть $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ —его собственные числа. Для вычисления n -го собственного числа λ_n можно указать способ, не требующий знания собственных элементов u_1, u_2, \dots, u_{n-1} , соответствующих предшествующим собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$; заключается этот способ в следующем. Возьмем в энергетическом пространстве H_A произвольные элементы v_1, v_2, \dots, v_{n-1} и найдем минимум величины $\|u\|_A^2$ при дополнительных условиях

$$\|u\|^2 = 1, \quad (u, v_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1);$$

этот минимум обозначим через $\lambda(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$. Оказывается, что

$$\lambda_n = \text{Max } \lambda(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}); \quad (3.135)$$

максимум берется по всевозможным наборам элементов v_1, v_2, \dots, v_{n-1} , принадлежащих энергетическому пространству H_A . Равенство (3.135) носит название *минимаксимального принципа*.

Минимаксимальный принцип позволяет в известных условиях сравнивать собственные числа различных операторов. Пусть A и B —два положительных оператора. Будем говорить, что оператор A не меньше оператора B , $A \geq B$, если пространство H_B содержит все элементы пространства H_A и для каждого элемента $u \in H_A$ имеет место неравенство

$|u|_A \geq |u|_B$. Доказывается, что если $A \geq B$ и B имеет дискретный спектр, то A тоже имеет дискретный спектр; если λ_n и μ_n ($n=1, 2, \dots$)—собственные числа операторов A и B соответственно, то $\lambda_n \geq \mu_n$ при любом n .

Отметим некоторые простые случаи. 1) Пусть две мембраны (или пластины) с жестко закрепленными краями изготовлены из одного материала и одна мембрана полностью укладывается в другой. Тогда собственные частоты колебаний меньшей мембраны больше соответствующих собственных частот большей мембраны. 2) Пластина с жестко закрепленным краем имеет большие частоты собственных колебаний, чем та же пластина, край которой упруго закреплен; в свою очередь в этом последнем случае частота больше, чем в случае свободно опертого или тем более свободного края.

§ 5. Другие вариационные методы и оценка погрешности

1. Оценка погрешности приближенного решения. Пусть u_0 и u_n —соответственно точное и приближенное решения уравнения

$$Au = f, \quad (3.136)$$

где оператор A предполагается положительно определенным

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \quad \gamma^2 = \text{const} > 0. \quad (3.137)$$

Задача заключается в оценке погрешности $u_0 - u_n$ в предположении, что приближенное решение известно, а точное неизвестно. Эту погрешность удобно характеризовать ее нормой в том или ином пространстве; проще всего воспользоваться нормой $\|u_0 - u_n\|$ гильбертова пространства H , в котором действует оператор A , или нормой $|u_0 - u_n|_A$ энергетического пространства H_A .

Если $u_n \in D(A)$, то верна простая формула для оценки погрешности

$$\|u_0 - u_n\| \leq \frac{1}{\gamma^2} \|Au_n - f\|. \quad (3.138)$$

Формулу (3.138) можно использовать, например, если u_n построено по методу Ритца, причем в качестве координатных использованы элементы из области $D(A)$. Если оператор A

дифференциальный, то это означает, что координатные функции удовлетворяют всем краевым условиям задачи. Следует иметь в виду, что оценка (3.138) грубая.

Другой, практически более важный способ оценки погрешности таков. Обозначим через $F(u)$ функционал энергетического метода:

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f) = |u|^2 - 2(u, f),$$

и через d — его минимум. Если δ — любое число, меньшее, чем d , то

$$|u_0 - u_n| \leq \sqrt{F(u_n) - \delta}; \quad (3.139)$$

как следствие отсюда получается еще одна оценка:

$$\|u_0 - u_n\| \leq \frac{1}{\gamma} \sqrt{F(u_n) - \delta}. \quad (3.140)$$

Применение формул (3.139) и (3.140) не предполагает, что $u_n \in D(A)$; достаточно, чтобы $u_n \in H_A$ (в частности, u_n может не удовлетворять естественным краевым условиям); это всегда имеет место, если u_n построено по методу Рунца. В этом случае можно указать удобную формулу для вычисления величины $F(u_n)$. Именно, если

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k,$$

где φ_k — координатные элементы, а a_k — решение соответствующей системы Рунца, то

$$F(u_n) = - \sum_{k=1}^n a_k (f, \varphi_k). \quad (3.141)$$

Общий прием построения чисел $\delta < d$ таков. Известно, что

$$d = \min F(u) = - |u_0|^2.$$

Допустим теперь, что нам удалось найти функционал $\Phi(v)$, обладающий тем свойством, что

$$\min \Phi(v) = -d = - \min F(u). \quad (3.142)$$

Если v — любой элемент из области определения функционала Φ , то $\Phi(v) \geq -d$ или $-\Phi(v) \leq d$ и, следовательно, можно положить $\delta = -\Phi(v)$. Построим для функционала $\Phi(v)$ минимизирующую последовательность, т. е. такую последовательность v_m ($m = 1, 2, \dots$), что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi(v_m) = -d,$$

и, положив в формуле (3.139) $\delta = -\Phi(v_m)$, мы получим оценку погрешности, сколь угодно близкую к ее действительной величине, если только m достаточно велико. Заметим, что последовательность v_m можно строить по методу Ритца. Дело сводится к построению функционала Φ , удовлетворяющего условию (3.142). Наиболее важными методами такого построения являются *метод ортогональных проекций* и *метод Трештца*. Заметим тут же, что каждый из этих методов позволяет строить приближенные решения уравнения (3.136).

2. Метод ортогональных проекций. Обратимся к уравнению (3.136). Пусть входящий в это уравнение положительно определенный оператор A можно представить в виде произведения двух сопряженных операторов T^* и T , так что $A = T^*T$. При этом необязательно, чтобы операторы T^* и T действовали в том же пространстве H , что и оператор A ; можно допустить, что T переводит элементы пространства H в элементы некоторого гильбертова пространства \mathfrak{H} , тогда, наоборот, T^* переводит элементы пространства \mathfrak{H} в элементы пространства H .

Положим в уравнении (3.136) $Tu = v$, тогда

$$T^*v = f. \quad (3.143)$$

Для дальнейшего интересен только тот случай, когда уравнение $T^*w = 0$ имеет решения, отличные от нулевого. Их совокупность образует в пространстве \mathfrak{H} некоторое подпространство, которое мы обозначим через \mathfrak{H}_2 . Ортогональное дополнение к \mathfrak{H}_2 обозначим через \mathfrak{H}_1 , так что $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$. Легко доказывается, что искомый элемент $v_0 = Tu_0 \in \mathfrak{H}_1$, и что $\|v_0\|_{\mathfrak{H}} = \|u_0\|_A$; здесь u_0 — решение уравнения (3.136).

Найдем какой-либо элемент $V \in \mathfrak{H}$, удовлетворяющий уравнению (3.143); предполагается, что это нетрудно осуществить. Тогда *искомый элемент v_0 есть проекция элемента V в подпространство \mathfrak{H}_1* ; разность $V - v_0$ есть, следовательно, проекция того же элемента V в подпространство \mathfrak{H}_2 .

Как известно из свойств проекции,

$$\|v_0\|_{\mathfrak{H}} = \text{Min} \|V - w\|_{\mathfrak{H}},$$

где минимум берется по всем элементам w , принадлежащим подпространству \mathfrak{H}_2 . Отсюда видно, что в качестве функционала Φ можно взять

$$\Phi(w) = \|V - w\|_{\mathfrak{H}}^2. \quad (3.144)$$

Будем решать задачу о минимуме функционала (3.144), например, по методу Ритца, и пусть w_m — приближенное решение этой задачи. Положим $v_m = V - w_m$. По формуле (3.139) имеем теперь

$$\|u_0 - u_n\| \leq \sqrt{F(u_n) + \|v_m\|_{\mathfrak{H}}^2}. \quad (3.145)$$

Элемент v_m можно рассматривать как приближенное значение элемента $v_0 = Tu_0$; справедлива оценка

$$\|v_0 - v_m\|_{\mathfrak{H}} \leq \sqrt{F(u_n) + \|v_m\|_{\mathfrak{H}}^2}. \quad (3.146)$$

В формулах (3.145) и (3.146) u_n означает приближенное решение уравнения (3.136), построенное по энергетическому методу.

Если за приближенное значение v_0 принять среднее арифметическое $\frac{1}{2}(Tu_n + v_m)$, то получается *точная формула для погрешности*

$$\left\| v_0 - \frac{1}{2}(Tu_n + v_m) \right\|_{\mathfrak{H}} = \frac{1}{2} \sqrt{F(u_n) + \|v_m\|_{\mathfrak{H}}^2}. \quad (3.147)$$

Эта формула была получена Дж. Синджем [126].

3. Приложения к частным задачам. Для уравнения Пуассона в трехмерном пространстве

$$-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = f(x, y, z) \quad (3.148)$$

поставим задачу Дирихле: найти интеграл этого уравнения, удовлетворяющий краевому условию (3.62):

$$u|_S = 0.$$

Как известно, $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$, и мы положим $Tu = -\operatorname{grad} u$, причем будем считать, что оператор T определен только на функциях, удовлетворяющих условию (3.62). В нашем случае $H = L_2(\Omega)$; в качестве пространства \mathfrak{H} можно взять пространство $L_2(\Omega)$ векторов, абсолютные величины которых квадратично суммируемы в Ω . Сопряженный к T оператор $T^*v = \operatorname{div} v$, так что $-\Delta = T^*T$. В рассматриваемом случае подпространство \mathfrak{H}_2 состоит из векторов с нулевой расходимостью (соленоидальных векторов), а подпространство \mathfrak{H}_1 — из градиентов скалярных функций, которые обращаются в нуль на границе S . В качестве V можно взять любое решение уравнения

$$\operatorname{div} V = f(x, y, z),$$

можно, например, положить

$$V = \left(0, 0, -\int_a^z f(x, y, z) dz\right),$$

где a — любое фиксированное число, для которого последний интеграл имеет смысл. По методу ортогональных проекций следует найти минимум интеграла

$$\|V - w\|^2 = \iiint_{\Omega} [(V_x - w_x)^2 + (V_y - w_y)^2 + (V_z - w_z)^2] dx dy dz,$$

где V_x, V_y, V_z и w_x, w_y, w_z суть проекции векторов V и w на оси координат; минимум ищется на множестве векторов w , удовлетворяющих уравнению $\operatorname{div} w = 0$. Если к этой задаче применить метод Ритца, то следует построить полную в \mathfrak{H}_2 систему векторов φ_n ($n = 1, 2, \dots$) и положить

$$w_m = \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k;$$

Пример 14. Применим метод ортогональных проекций к задаче (3.71), (3.72). Положим $-\text{grad } u = \mathbf{v}$, где \mathbf{v} — двумерный вектор; его составляющие суть $v_x = -\frac{\partial u}{\partial x}$, $v_y = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Уравнение (3.72) переходит в следующее:

$$\text{div } \mathbf{v} = 1.$$

Легко построить вектор V , удовлетворяющий последнему уравнению; достаточно, например, положить $V_x = x$, $V_y = 0$. Выберем теперь полную систему векторов Φ_n , удовлетворяющих уравнению $\text{div } \Phi_n = 0$. Такую систему можно построить, выбирая составляющие векторов Φ_n в виде произведений степеней x и y ; следует при этом иметь в виду, что понадобятся не все такие векторы. Дело в том, что функция $u(x, y)$, решающая задачу (3.71), (3.72), четная как относительно x , так и относительно y ; поэтому составляющая $v_x = -\frac{\partial u}{\partial x}$ должна быть нечетной по x и четной по y , а составляющая

$v_y = -\frac{\partial u}{\partial y}$ — нечетной по y и четной по x . Такими же должны быть и составляющие вектора $\mathbf{w} = V - \mathbf{v}$; так как векторы \mathbf{w}_n нужны только для аппроксимации вектора \mathbf{w} , то их можно подчинить тем же условиям четности и нечетности и можно положить

$$\Phi_1 = (x, -y), \quad \Phi_2 = (x^3, -3x^2y), \quad \Phi_3 = (3xy^2, -y^3), \dots$$

Ограничиваясь выписанными членами, положим

$$\mathbf{w} \approx \mathbf{w}_3 = \alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2 + \alpha_3 \Phi_3$$

или, более подробно,

$$w_x \approx w_{3x} = \alpha_1 x + \alpha_2 x^3 + 3\alpha_3 xy^2,$$

$$w_y \approx w_{3y} = -\alpha_1 y - 3\alpha_2 x^2 y - \alpha_3 y^3.$$

Коэффициенты α_1 , α_2 , α_3 следует определить из системы (3.149), которая в данном случае имеет следующий вид:

$$\frac{8}{3} \alpha_1 + \frac{32}{15} \alpha_2 + \frac{32}{15} \alpha_3 = \frac{4}{3},$$

$$\frac{32}{15} \alpha_1 + \frac{104}{35} \alpha_2 + \frac{8}{5} \alpha_3 = \frac{4}{5},$$

$$\frac{32}{15} \alpha_1 + \frac{8}{5} \alpha_2 + \frac{104}{35} \alpha_3 = \frac{4}{3}.$$

Отсюда $\alpha_1 = 0,5000$, $\alpha_2 = -\frac{7}{36} \approx -0,1944$, $\alpha_3 = \frac{7}{36} \approx 0,1944$ и, следовательно,

$$\mathbf{w}_3 = 0,5000\Phi_1 - 0,1944\Phi_2 + 0,1944\Phi_3.$$

Приближенное решение по методу ортогональных проекций имеет вид

$$w_{3x} = x - (0,5000x - 0,1944x^3 + 0,5832xy^2),$$

$$w_{3y} = - (0,5000y - 0,5832xy^2 + 0,1944y^3).$$

Имея это решение, можно оценить погрешность приближенного решения (3.73), построенного по энергетическому методу. В формуле (3.145), дающей оценку погрешности, величину $F(u_3)$ можно вычислить по формуле (3.141); для величины $\|v_3\|^2$ можно тем же способом получить аналогичную формулу

$$\|v_3\|^2 = \|V\|^2 - \sum_{k=1}^3 \alpha_k(V, \varphi_k).$$

Произведя необходимые вычисления, получим:

$$F(u_3) = -0,5616, \quad \|v_3\|^2 = 0,5630$$

и, следовательно,

$$|u - u_3| \leq \sqrt{0,5630 - 0,5616} = \sqrt{0,0014} = 0,0374,$$

что дает относительную погрешность по энергии порядка 6%.

В силу формулы (3.146) та же величина 0,0374 дает верхнюю границу погрешности приближенного решения v_3 , построенного по методу ортогональных проекций.

Если за приближенное значение вектора $v = -\text{grad } u$ принять

$$\tilde{v} = \frac{1}{2} (-\text{grad } u_3 + v_3),$$

то по формуле (3.147) имеем точное равенство

$$\|v - \tilde{v}\| = \frac{1}{2} \sqrt{0,0014} = 0,0187.$$

4. Метод Трэфтца. Пусть в области Ω требуется проинтегрировать линейное дифференциальное уравнение

$$Lu = f(x) \quad (3.150)$$

при некоторых, скажем однородных, краевых условиях

$$G_k u|_S = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

и пусть оператор A , совпадающий с L на множестве функций, удовлетворяющих этим краевым условиям, положительно определенный.

Чтобы сформулировать метод Трэфтца, введем сперва понятия билинейного и однородного квадратичного функционалов. Функционал $\Phi(u, v)$, зависящий от двух переменных элементов u и v , называется *билинейным*, если он линеен по отношению к каждому из элементов u и v в отдельности,

т. е. если для любых постоянных a_1 и a_2 верны равенства

$$\begin{aligned}\Phi(a_1 u_1 + a_2 u_2, v) &= a_1 \Phi(u_1, v) + a_2 \Phi(u_2, v), \\ \Phi(u, a_1 v_1 + a_2 v_2) &= a_1 \Phi(u, v_1) + a_2 \Phi(u, v_2).\end{aligned}$$

Однородный квадратичный функционал получается из билинейного, если в последнем положить $u = v$: $\Phi(v) = \Phi(v, v)$.

Обозначим через u_0 решение задачи, сформулированной в начале настоящего пункта. Метод Трэфтца заключается в том, что строится какой-нибудь неотрицательный одно-родный квадратичный функционал Φ , определенный на решениях уравнения (3.150) и удовлетворяющий на этих решениях неравенству $\Phi(v) \geq \Phi(u_0)$ и равенству $\Phi(u_0) = |u_0|^2$. Коль скоро этот функционал построен, ставится задача о нахождении такого решения уравнения (3.150), которое реализует минимум этого функционала на множестве всевозможных решений упомянутого уравнения. Если в нашем распоряжении имеется какое-либо частное решение уравнения (3.150) и полная система линейно независимых решений однородного уравнения $Lp = 0$, то задачу о минимуме функционала $\Phi(v)$ можно решать по методу Ритца; координатными функциями при этом служат упомянутые решения однородного уравнения.

Можно указать общий прием для построения «функционалов Трэфтца» (см. литературные указания в конце главы); здесь мы ограничимся тем, что приведем эти функционалы для некоторых простейших задач.

1) Для задачи об интегрировании уравнения Пуассона — $\Delta u = f(x)$ при краевых условиях

$$u|_{S_1} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \right]_{S_2} = 0, \quad \sigma \geq \sigma_0 = \text{const}, \quad S_1 + S_2 = S,$$

можно взять

$$\begin{aligned}\Phi(v) &= \int_{\Omega} (\text{grad } v)^2 dx + \int_S \tilde{\sigma} v^2 dS + \\ &+ \int_{S_2} \frac{1}{\sigma - \tilde{\sigma}} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \tilde{\sigma} v \right)^2 dS, \quad (3.151')\end{aligned}$$

где $\tilde{\sigma}$ — любая функция, подчиненная неравенству $0 \leq \tilde{\sigma} < \sigma$.

В случае задачи Дирихле поверхность S_2 отсутствует и можно взять

$$\Phi(v) = \int_{\Omega} (\text{grad } v)^2 dx + \int_S \tilde{\sigma} v^2 ds, \quad (3.151'')$$

где $\tilde{\sigma}$ — любая неотрицательная функция; можно, в частности, положить $\tilde{\sigma} \equiv 0$.

В случае задачи Неймана можно принять

$$\Phi(v) = \int_{\Omega} (\text{grad } v)^2 dx - \alpha \int_S v^2 ds + \frac{1}{\alpha} \int_S \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} - \alpha v \right)^2 ds, \quad (3.151''')$$

где α — достаточно малая постоянная. Минимумы функционалов (3.151) следует искать на решениях уравнения Пуассона — $\Delta v = f(x)$.

2) Рассмотрим уравнение изгиба пластины

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x, y) \quad (3.152)$$

при краевых условиях $w|_S = 0, \frac{\partial w}{\partial \nu}|_S = 0$. В данном случае функционал Φ имеет очень простой вид:

$$\Phi(v) = \iint_{\Omega} (\Delta v)^2 dx dy, \quad (3.153')$$

где Ω — область пластины, $v(x, y)$ — любое решение уравнения (3.152). Этот функционал можно еще упростить, положив $\Delta v = q(x, y)$. Тогда дело сводится к нахождению минимума функционала

$$\Phi_1(q) = \iint_{\Omega} q^2 dx dy \quad (3.153'')$$

на множестве решений уравнения $\Delta q = f(x, y)$.

3) В случае свободно опертой пластины функционал метода Третьяка имеет различный вид в зависимости от того, будет ли контур S пластины выпуклым или он содержит невыпуклые участки. Если контур выпуклый, то можно

положить

$$\Phi(v) = \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dx dy + \\ + \frac{1}{\sigma} \int_S \varrho \left[\Delta v - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial v} \right) \right]^2 ds. \quad (3.153''')$$

Здесь σ — постоянная Пуассона, ϱ — радиус кривизны контура, s — длина его дуги. Если контур содержит невыпуклые участки, то можно положить

$$\Phi(v) = \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2(1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy + \\ + \int_S \left\{ \beta v^2 - \alpha \left(\frac{\partial v}{\partial v} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \left[\Delta v - (1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial v} \right) \right]^2 \right\} ds. \\ (3.153^{IV})$$

Здесь α и β — положительные постоянные, причем постоянная α достаточно мала.

Минимумы функционалов (3.153) следует искать на множестве решений уравнения (3.152).

Скажем подробнее о нахождении минимума функционала $\Phi(v)$ Треффта. Пусть ψ — какое-нибудь частное решение уравнения (3.150), p — произвольное решение однородного уравнения $Lp=0$. Любое решение уравнения (3.150) можно представить в виде $v = \psi + p$. Как известно, при весьма широких условиях решения уравнения $Lp=0$, квадратично суммируемые в данной конечной области Ω , образуют в пространстве $L_2(\Omega)$ некоторое подпространство. Пусть последовательность $\{p_n(x)\}$ элементов этого подпространства (иначе говоря, решений однородного уравнения, квадратично суммируемых в Ω) полная в нем, и пусть функции $p_n(x)$ таковы, что ни на какой их конечной линейной комбинации функционал Φ не обращается в нуль, если только коэффициенты такой комбинации не все равны нулю. Примем функции $p_n(x)$ за координатные; приближенное решение задачи

о минимуме функционала $\Phi(v)$ будем искать в виде

$$v_m(x) = \psi(x) + \sum_{k=1}^m \alpha_k p_k(x);$$

коэффициенты α_k определяются из линейной системы

$$\sum_{k=1}^m \Phi(p_k, p_j) \alpha_k = -\Phi(\psi, p_j) \quad (j=1, 2, \dots, m), \quad (3.154)$$

которая разрешима и имеет единственное решение. Очевидно, $\Phi(v_m) \geq \Phi(u_0)$, поэтому можно в формуле (3.62) положить $\delta = -\Phi(v_m)$, и мы получаем новую оценку погрешности приближенного решения, построенного энергетическим методом:

$$|u_0 - u_n| \leq \sqrt{F(u_n) + \Phi(v_m)}. \quad (3.155)$$

Если функционал Φ определен также и на решениях однородного уравнения $Lp=0$, то формула

$$\sqrt{\Phi(u_0 - v_m)} \leq \sqrt{F(u_n) + \Phi(v_m)} \quad (3.155')$$

дает некоторое представление о погрешности приближенного решения v_m , построенного по методу Трэфтца.

О сходимости метода Трэфтца см. [63].

Пример 15. Рассмотрим задачу о кручении стержня квадратного сечения, которой мы уже занимались в п. 4 § 3 и в п. 3 настоящего параграфа. Решения уравнения $-\Delta v = 1$ имеют вид $v = -\frac{x^2}{2} + p(x, y)$, где p — гармоническая функция. Функционал Трэфтца возьмем в виде (3.151''), положив при этом $\sigma \equiv 0$; дело сводится к построению функции $p(x, y)$, гармонической в квадрате $-1 \leq x, y \leq 1$ и реализующей минимум интеграла

$$\begin{aligned} \Phi(v) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\text{grad} \left(p(x, y) - \frac{x^2}{2} \right) \right)^2 dx dy = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} - x \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned}$$

Можно доказать, что система гармонических функций

$$\frac{\cos \frac{(2m-1)\pi x}{2}}{\sin \frac{(2m-1)\pi x}{2}} \frac{\text{ch} \frac{(2m-1)\pi y}{2}}{\text{sh} \frac{(2m-1)\pi y}{2}} \quad (m=1, 2, \dots)$$

удовлетворяет перечисленным выше требованиям. В силу свойств симметрии искомого решения достаточно взять в качестве координатных функций

$$p_m(x, y) = \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2} \operatorname{ch} \frac{(2m-1)\pi y}{2} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Нетрудно проверить, что функции p_m удовлетворяют такому соотношению «ортогональности»:

$$\Phi(p_k, p_m) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial p_k}{\partial x} \frac{\partial p_m}{\partial x} + \frac{\partial p_k}{\partial y} \frac{\partial p_m}{\partial y} \right) dx dy = 0, \quad k \neq m.$$

Поэтому в j -м уравнении системы (3.154) слева останется только член, содержащий a_j ; эта величина, следовательно, легко вычисляется, она равна

$$a_j = \frac{(-1)^j \cdot 16}{(2j-1)^2 \pi^2 \operatorname{ch} \frac{(2j-1)\pi}{2}}.$$

Пользуясь тем же соотношением «ортогональности», легко найдем, что

$$\Phi(v_m) = \frac{4}{3} - \frac{256}{\pi^2} \sum_{k=1}^m \frac{\operatorname{th} \frac{2k-1}{2}\pi}{(2k-1)^2}.$$

Слагаемые в последней сумме довольно быстро убывают, и можно ограничиться небольшим значением m . Взяв $m = 3$, получим $\Phi(v_3) = 0,5620$. Выше (см. п. 3) было приведено значение $F(u_2) = -0,5616$; формула (3.154) дает теперь

$$|u_0 - u_2| \leq \sqrt{0,5620 - 0,5616} = 0,02.$$

Таким образом, решение (3.73) точнее, чем это следует из оценки п. 3.

Пример 16. Рассмотрим задачу об изгибе упругой квадратной пластинки, заполняющей область $-1 \leq x, y \leq 1$, жестко закрепленной по краю и находящейся под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки. При подходящем выборе единиц измерения задача сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 1$$

при краевых условиях

$$\omega(x, \pm 1) = \omega(\pm 1, y) = \omega_x(\pm 1, y) = \omega_y(x, \pm 1) = 0.$$

Решая эту задачу энергетическим методом, следует приближенно вычислить функцию, удовлетворяющую только что сформулированным краевым условиям и реализующую минимум интеграла

$$F(\omega) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\Delta\omega)^2 - 2\omega] dx dy.$$

Координатные функции возьмем в виде

$$(x^2 - 1)^2 (y^2 - 1)^2 (x^{2k} y^{2m} + x^{2m} y^{2k}) \quad (k, m = 0, 1, 2, \dots);$$

такие координатные функции учитывают симметрию задачи. Ограничиваясь двумя первыми функциями, можно так записать приближенное решение:

$$\omega_2 = (x^2 - 1)^2 (y^2 - 1)^2 [a_1 + a_2 (x^2 + y^2)].$$

В нашем случае система (3.24) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{18}{7} a_1 + \frac{36}{77} a_2 &= \frac{7}{128}, \\ \frac{36}{77} a_1 + \frac{96}{91} a_2 &= \frac{1}{64}. \end{aligned}$$

Решив эту систему, найдем

$$\omega_2 = (x^2 - 1)^2 (y^2 - 1)^2 [0,02067 + 0,0038 (x^2 + y^2)].$$

Соответствующее значение функционала F равно $F(\omega_2) = -0,02486$.

Найдем теперь приближенное решение по методу Трэфтца, для чего нам понадобятся решения уравнения $\Delta q = 1$; эти решения можно представить в виде $q(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{4} + p(x, y)$, где $\Delta p = 0$. В качестве координатных функций возьмем гармонические полиномы, учитывающие симметрию задачи и ортонормированные по области квадрата. Первые три из них равны:

$$\begin{aligned} p_1(x, y) &= \frac{1}{2}, \quad p_2(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{13}} \left[\frac{1}{2} + \frac{15}{8} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \right], \\ p_3(x, y) &= 0,356359 \left(p_1 - \sqrt{\frac{7}{13}} \cdot 4,76724 p_2 - 1,40625 N_3 \right), \end{aligned}$$

где

$$N_3 = x^8 - 28x^6y^2 + 70x^4y^4 - 28x^2y^6 + y^8.$$

Приближенное решение задачи о минимуме функционала (3.153^а) будем искать в виде

$$q_3 = \frac{x^2 + y^2}{4} + \alpha_1 p_1(x, y) + \alpha_2 p_2(x, y) + \alpha_3 p_3(x, y).$$

Благодаря тому, что полиномы p_k ортонормированы, система (3.154), в которой следует заменить Φ на Φ_1 , принимает особенно простую форму:

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = -0,1397, \quad a_3 = 0,0014.$$

Не определяя соответствующую функцию v_3 (это было бы связано с трудными вычислениями), можно все же утверждать, что $\Phi(v_3) = \Phi_1(q_3) = 0,02491$. Теперь по формуле (3.155)

$$|\omega_0 - \omega_2| \leq \sqrt{0,02491 - 0,02486} = 0,0071;$$

здесь ω_0 — точное решение задачи. Имея оценку энергетической нормы, можно оценить абсолютную величину разности $\omega_0 - \omega_2$ см. [63]); эта оценка имеет вид $|\omega_0 - \omega_2| \leq 0,005$.

5. Двусторонние оценки функционалов. Часто бывает важно найти не само решение уравнения $Au_0 = f$, а некоторый функционал от этого решения вида (u_0, g) , где g — данный элемент рассматриваемого гильбертова пространства. Простейший и самый грубый прием для этого состоит в том, что находят приближенное решение u_n данного уравнения и полагают приближенно

$$(u_0, g) \approx (u_n, g). \quad (3.156)$$

Погрешность этого приближенного равенства оценивается формулой

$$|(u_0, g) - (u_n, g)| \leq \|g\| \|u_0 - u_n\|.$$

Если A — положительно определенный оператор и $u_n \in H_A$, то величину $\|u_0 - u_n\|$ можно оценить, используя метод ортогональных проекций или метод Трэфтца. Можно строить приближенные формулы, вообще говоря, более точные, чем формула (3.156). Можно положить приближенно

$$(u_0, g) \approx b_n = (u_n, g) + (f - f_n, v_n), \quad (3.156')$$

где $f_n = Au_n$ и v_n — приближенные решения уравнения $Av_0 = g$. Погрешность формулы (3.156') определяется неравенством

$$|(u_0, g) - b_n| \leq \|u_0 - u_n\| \cdot \|v_0 - v_n\|. \quad (3.156'')$$

Правую часть формулы (3.156'') можно оценить, привлекая для этой цели метод ортогональных проекций или метод Трэфтца.

Еще одну приближенную формулу можно построить следующим образом. Пусть, как в п. 2 настоящего параграфа, $A = T^*T$. Пусть u и v — произвольные элементы из области определения оператора T , а u' и v' — произвольные решения уравнений $T^*u' = f$ и $T^*v' = g$. Положим

$$\alpha = (u, g) + (v, f) - (Tu, Tv), \quad \beta = (u', v').$$

Погрешность приближенного равенства

$$(u_0, g) \approx \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

не превосходит величины

$$\frac{1}{2} \|Tu - u'\| \|Tv - v'\|.$$

6. Двусторонние оценки собственных чисел. Энергетический метод дает приближенные значения собственных чисел положительно определенного оператора с избытком. Важная задача об определении приближенных значений с недостатком не может считаться в настоящее время решенной полностью. Здесь мы укажем два приема решения этой задачи; каждый из них имеет довольно ограниченную область применения.

1) Пусть данный положительно определенный оператор дифференциальный. Если известна его функция Грина $G(x, y)$, то его собственные числа совпадают с характеристическими числами интегрального уравнения

$$u(x) - \lambda \int_{\Omega} G(x, y) u(y) dy = 0. \quad (3.157)$$

Будучи функцией Грина положительно определенного оператора, функция $G(x, y)$ симметрична. Допустим еще, что «двойной» интеграл

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |G(x, y)|^2 dx dy$$

конечен. Обозначим через $G_m(x, y)$ m -е итерированное ядро уравнения (3.157) и через a_m так называемый след этого ядра:

$$a_m = \int_{\Omega} G_m(x, x) dx.$$

Если наименьшее характеристическое число λ_1 имеет кратность p , то справедливо приближенное равенство ¹⁾

$$\lambda_1 \approx \sqrt[2p]{\frac{p}{a_{2m}}}, \quad (3.158)$$

дающее значение λ_1 с недостатком.

¹⁾ Подробнее об этом см. гл. IV настоящего справочника, § 1, п. 5.

При $m \rightarrow \infty$ получается точное равенство

$$\lambda_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2^m \sqrt{a_{2m}}}.$$

Поэтому при достаточно большом m погрешность формулы (3.158) сколь угодно мала. Если характеристические числа уравнения (3.157) λ_1 и λ_2 оба простые и значение λ_1 известно точно или с избытком, то формула

$$\lambda_2 \approx \frac{1}{\lambda_1} \sqrt[2m]{\frac{2}{a_{2m}^2 - a_{4m}}}$$

дает значение λ_2 с недостатком. Можно построить аналогичные формулы и для случая кратных характеристических чисел λ_1 и λ_2 ; а также для последующих характеристических чисел.

Изложенный здесь прием дает удовлетворительный результат для некоторых типов обыкновенных дифференциальных уравнений, когда построение функции Грина и ее итераций выполняется сравнительно просто.

Пример 17. Обратимся к примеру 11. Легко построить функцию Грина оператора (3.123); при $x \leq y$ она равна

$$G(x, y) = \frac{2(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{2}-\sqrt{1+y})}{\sqrt{2}-1};$$

значение ее при $x > y$ получается перестановкой аргументов x и y . Значение второго итерированного ядра при $x \leq y$ таково:

$$G_2(x, y) = \frac{4}{3(3-2\sqrt{2})} \left\{ (\sqrt{2}-\sqrt{1+y}) \left[(\sqrt{2}-1) \left(-2-x-\frac{x^2}{2} - 2\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+x} \right) + 4(\sqrt{2}-\sqrt{1+x}) \right] + \right. \\ \left. + (\sqrt{1+x}-1) \left[(\sqrt{2}-1) \left(2+y+\frac{y^2}{2} + 2\sqrt{2}\sqrt{1+y} - \sqrt{2}y\sqrt{1+y} \right) - \frac{11}{2}(\sqrt{1+y}-1) \right] \right\};$$

для $x > y$ значение $G_2(x, y)$ опять получается перестановкой аргументов x и y . По общему правилу вычисления итерированных ядер

имеем

$$G_4(x, y) = \int_0^1 G_2(x, s) G_2(s, y) ds = \int_0^1 G_2(x, s) G_2(y, s) ds.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} a_4 &= \int_0^1 G_4(x, x) dx = \int_0^1 \int_0^1 G_2^2(x, s) dx ds = 2 \int_0^1 ds \int_0^s G_2^2(x, s) dx = \\ &= 0,50092905 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Как хорошо известно, собственные числа первой краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка—простые, поэтому $p = 1$, и по формуле (3.158) мы получаем

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{\sqrt[4]{a_4}} = 11,88655.$$

Воспользовавшись формулой (3.124), найдем

$$11,88655 \leq \lambda_1 \leq 12,12255.$$

Среднее арифметическое обоих приближенных значений дает нам новое приближенное значение

$$\lambda_1 \approx 12,00455,$$

с относительной погрешностью, меньшей 1%.

2) Еще один прием был разработан на частном примере А. Вайнштейном и в общем случае Н. Ароншайном. Другое изложение того же по существу приема было позднее дано И. В. Свирским; здесь мы следуем последнему изложению, как более простому.

Пусть кроме данного оператора A нам известен также меньший оператор A_0 , область определения которого $D(A_0) \supset D(A)$, и пусть все собственные числа оператора A_0 нам известны. Если λ_n и $\lambda_n^{(0)}$ —собственные числа операторов A и A_0 соответственно, то $\lambda_n \geq \lambda_n^{(0)}$, и мы сразу получаем значения чисел λ_n с недостатком, однако эти значения будут, вообще говоря, весьма грубыми. Для их уточнения строится последовательность операторов A_k ($k = 1, 2, \dots$) таких, что $A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A$. Тогда при любом k будет $\lambda_n^{(0)} \leq \lambda_n^{(k)} \leq \lambda_n$, где $\lambda_n^{(k)}$ —собственные числа оператора A_k .

Операторы A_k строятся следующим образом. Полагаем $A - A_0 = C$; оператор C неотрицательный. Выбираем k элементов $f_r \in D(A)$, удовлетворяющих соотношениям

$$(Cf_r, f_s) = \begin{cases} 0, & r \neq s, \\ 1, & r = s. \end{cases}$$

Теперь можно положить

$$A_k u = A_0 u + \sum_{r=1}^k (Cu, f_r) Cf_r.$$

Целесообразно строить оператор A_k так, чтобы имело место строгое неравенство $\lambda_1^{(0)} < \lambda_1^{(k)}$. Это будет иметь место, если, каков бы ни был собственный элемент $\tilde{\varphi}$ оператора A_0 , соответствующий собственному числу λ_0 , найдется такой элемент f_r , что $(Cf_r, \tilde{\varphi}) \neq 0$. Для этого в свою очередь достаточно, чтобы число k было больше или равно кратности собственного числа $\lambda_1^{(0)}$.

Некоторые оценки снизу для наименьшего собственного числа можно получить из следующих соображений. Пусть A — положительно определенный оператор с дискретным спектром. Пусть, далее, u — произвольный элемент из области определения оператора A , такой, что $\|u\| = 1$. Положим $(Au, u) = \eta$ и $\|Au - \eta u\|^2 = \|Au\|^2 - \eta^2 = \varepsilon^2$. Известно, что тогда в промежутке $\eta - \varepsilon \leq \lambda \leq \eta + \varepsilon$ есть хотя бы одно собственное число оператора A . Допустим теперь, что нам известна хотя бы грубая оценка для второго собственного числа: $\lambda_2 > \beta$, и при этом оказалось, что $\eta + \varepsilon < \beta$. Тогда первое собственное число λ_1 заключено в пределах $\eta - \varepsilon \leq \lambda_1 \leq \eta$ и, следовательно, $\eta - \varepsilon$ есть приближенное значение λ_1 с недостатком.

Если собственное число λ_1 простое (однократное), то можно указать, вообще говоря, более точное значение λ_1 с недостатком:

$$\lambda_1 \geq \eta - \frac{\varepsilon^2}{\beta - \eta}.$$

7. Ошибка в решении, проистекающая от ошибки в уравнении. С целью упрощения задачи часто заменяют данное уравнение $Au = f$ другим уравнением $Bu = f$, содержащим более простой оператор B . Это приводит к некоторой ошибке в решении, которую можно оценить следующим образом.

Пусть оба оператора A и B положительно определенные, и пусть соответствующие энергетические пространства H_A и H_B состоят из одних и тех же элементов. Тогда существуют такие положительные постоянные α_1 и α_2 , что

$$\alpha_1 \|u\|_B^2 \leq \|u\|_A^2 \leq \alpha_2 \|u\|_B^2.$$

Пусть u_0 и u_1 удовлетворяют уравнениям $Au_0 = f$ и $Bu_1 = f$. Имеет место неравенство

$$\|u_0 - u_1\|_B \leq \eta \|u_1\|_B,$$

где

$$\eta = \text{Max} \left(\frac{|\alpha_1 - 1|}{\alpha_1}, \frac{|\alpha_2 - 1|}{\alpha_2} \right).$$

М. Г. Слободянский [92] заметил, что константу η можно уменьшить, если заменить u_1 на $u_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) u_1$. Тогда

$$\|u_0 - u_2\|_B \leq \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1} \|u_2\|_B.$$

§ 6. Метод наименьших квадратов

1. Общие замечания. Пусть A — линейный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве; ни симметричности, ни тем более положительности оператора A мы не предполагаем. Пусть уравнение

$$Au = f \quad (3.159)$$

разрешимо. Тогда элемент u_0 , удовлетворяющий этому уравнению, очевидным образом реализует минимум функционала

$$\|Au - f\|^2. \quad (3.160)$$

Метод наименьших квадратов и состоит в замене уравнения (3.159) вариационной задачей о минимуме функционала (3.160). Эту задачу можно решать по методу Ритца. Выберем последовательность координатных элементов φ_n ($n = 1, 2, \dots$), принадлежащих области определения оператора A , положим

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \quad (3.161)$$

$Au_n \rightarrow f$, так что *приближенное решение приближенно удовлетворяет данному уравнению*; как известно, в общем случае это соотношение не имеет места, если u_n построено по энергетическому методу.

На практике метод наименьших квадратов удобно применять в следующей форме. Пусть задача состоит в отыскании одной или нескольких функций $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}$, которые удовлетворяют двум системам линейных уравнений: однородной

$$L_j(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (3.166)$$

и неоднородной

$$G_j(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}) = f^{(j)} \quad (j=1, 2, \dots, m). \quad (3.167)$$

Совокупности $(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)})$ и $(f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(m)})$ будем трактовать как элементы некоторого гильбертова пространства H ; в выборе этого пространства остается значительный произвол, который можно использовать для упрощения и уточнения вычислений. Координатные элементы $\varphi_n = \{\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}, \dots, \varphi_n^{(m)}\}$ ($n=1, 2, \dots$) выбираются так, чтобы они удовлетворяли однородной системе (3.166). Далее полагаем

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$$

или, подробнее,

$$u_n^{(j)} = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k^{(j)} \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

и коэффициенты a_k определяем из условия $\|Gu_n - f\|^2 = \min$; через G обозначен оператор, порожденный в пространстве H совокупностью операторов G_j .

2. Связь с энергетическим методом. Пусть A^* — оператор, сопряженный с A . Если уравнение (3.159) разрешимо и $f \in D(A^*)$, то уравнение (3.159) равносильно уравнению

$$A^*Au = A^*f. \quad (3.168)$$

Далее, если выполнено неравенство (3.163), то оператор A^*A положительно определенный:

$$(A^*Au) \geq K^{-2} \|u\|^2.$$

Решение уравнения (3.168) реализует минимум функционала

$$(A^*Au, u) - 2(A^*f, u) = \|Au - f\|^2 - \|f\|^2,$$

который только постоянным членом $\|f\|^2$ отличается от функционала $\|Au - f\|^2$. Таким образом, при перечисленных здесь условиях метод наименьших квадратов для уравнения (3.159) совпадает с энергетическим методом для уравнения (3.168).

С другой стороны, если оператор A положительно определенный, то энергетический метод для уравнения (3.159) совпадает с методом наименьших квадратов для уравнения

$$A^{1/2}u = A^{-1/2}f,$$

равносильного уравнению (3.159).

3. Применение к задачам теории потенциала на плоскости. Пусть D — конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$ и S — граница этой области. Границу S будем считать достаточно гладкой; точнее говоря, будем считать, что угол между нормалью к S и осью x имеет по крайней мере $r + 2$ непрерывных производных по дуге; r — вводимое ниже число. Через $L_2(S)$ обозначим *комплексное* гильбертово пространство функций, квадратично суммируемых вдоль S , а через $L_2^{(r)}(S)$, $r > 0$, — также комплексное гильбертово пространство, элементы которого суть функции, непрерывные на S вместе со своими производными порядка до $r - 1$ по комплексной координате переменной точки контура S , тогда как их (обобщенные) r -е производные квадратично суммируемы вдоль S . Скалярное произведение и норму в $L_2^{(r)}(S)$ зададим формулами:

$$(\varphi, \psi)_r = \int_S [\varphi(z) \overline{\psi(z)} + \varphi^{(r)}(z) \overline{\psi^{(r)}(z)}] ds,$$

$$\|\varphi\|_r^2 = \int_S [|\varphi(z)|^2 + |\varphi^{(r)}(z)|^2] ds.$$

Здесь z — комплексная координата (аффикс) переменной точки контура L и $ds = |dz|$. Скалярное произведение и норма в $L_2(S)$ определяются обычными формулами:

$$(\varphi, \psi) = \int_S \varphi(z) \overline{\psi(z)} ds, \quad \|\varphi\|^2 = \int_S |\varphi(z)|^2 ds.$$

Если коэффициенты удовлетворяют системе (3.170), то $\|u_n - f\| \rightarrow 0$, а $\omega_n(z) \rightarrow \omega(z)$ равномерно в любой внутренней подобласти D ; отсюда, как известно, вытекает, что в любой внутренней подобласти производные $\omega_n^{(k)}(z)$ равномерно стремятся к $\omega^{(k)}(z)$ при любом k .

Коэффициенты a_k можно определять также из условия $\|u_n - f\|_r^2 = \min$. Это приведет к системе вида (3.170), в которой все скалярные произведения следует снабдить индексом r . Если a_k удовлетворяют такой системе, то при $0 \leq k \leq r-1$ $\omega_n^{(k)}(z) \rightarrow \omega^{(k)}(z)$ равномерно в замкнутой области $\bar{D} = D + S$.

Задачу Неймана поставим как задачу о построении гармонической в D функции, нормальная производная которой на S совпадает с заданной вещественной функцией $h(z)$; для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_S h(z) ds = 0.$$

В данном случае голоморфная в D функция $\omega(z)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого, которое мы нормируем условием $\omega(0) = 0$. Приближенное решение ищем в виде

$$\omega_n(z) = u_n(x, y) + iv_n(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k z^k, \quad a_k = \alpha_k + i\beta_k.$$

Положим

$$\rho_k(z) = \frac{\partial}{\partial \nu} \operatorname{Re}(z^k),$$

$$\sigma_k(z) = \frac{\partial}{\partial \nu} \operatorname{Im}(z^k);$$

ν — внешняя нормаль к S . Если коэффициенты a_k определять из условия $\left\| \frac{\partial u_n}{\partial \nu} - h(z) \right\|_r = \min$, то получится

$\psi(z)$ будем искать в виде полиномов

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=1}^n a_k z^k, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$$

и потребуем, чтобы

$$\| (3-4\sigma)\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} - g(z) \|_r^2 = \min. \quad (3.172)$$

Отсюда получается система уравнений для неизвестных коэффициентов. Укажем её построение. Обозначим

$$\begin{aligned} a_k &= \alpha_k + i\alpha_{n+k}, & b_k &= \alpha_{2n+k+1} + i\alpha_{3n+k+2}, \\ \Phi_{2k-1}(z) &= z^{(k)}, & \Phi_{2k}(z) &= iz^k, & 1 \leq k \leq n, \\ \Phi_m(z) &\equiv 0, & m &> 2n, \\ \Psi_m(z) &\equiv 0, & m &\leq 2n, \\ \Psi_{2k+2n+1}(z) &= z^{(k)}, & \Psi_{2k+2n+2}(z) &= iz^k, & 0 \leq k \leq n, \\ g_k(z) &= (3-4\sigma)\Phi_k(z) - z\overline{\Phi_k'(z)} - \overline{\Psi_k(z)}. \end{aligned}$$

Из условия (3.172) получается следующая система для коэффициентов α_k :

$$\sum_{k=1}^{4n+2} \operatorname{Re}(g_k, g_j) \alpha_k = \operatorname{Re}(g, g_j) \quad (j=1, 2, \dots, 4n+2),$$

которая разрешима и имеет единственное решение. Если $r \geq 2$ то

$$\varphi_n(z) \rightarrow \varphi(z), \quad \varphi_n'(z) \rightarrow \varphi'(z) \quad \text{и} \quad \psi_n(z) \rightarrow \psi(z)$$

равномерно в замкнутой области. Если $r < 2$, то равномерная сходимость имеет место в любой замкнутой подобласти.

§ 7. Об устойчивости метода Рунца

1. Общие замечания. Если координатная система удовлетворяет требованиям, перечисленным в п. 3 § 2, то приближенное по Рунцу решение стремится, при возрастании его номера до бесконечности, к точному решению. Это утверждение верно, если само приближенное решение вычислено без погрешности. На практике, как правило, дело обстоит не так: обычно можно считать точно заданными только координатные элементы, коэффициенты же приближенного

решения определяются из системы Ритца, которая и строится, и решается не точно, а с некоторой погрешностью. Эти погрешности, которые мы предполагаем малыми, не очень существенны, если порядок системы Ритца невелик, иначе говоря, если по методу Ритца ищется грубое приближение; в этом случае практически пригодна любая координатная система, удовлетворяющая упомянутым выше условиям. Если же желательно построить более точное приближение, то необходимо прибегнуть к системам Ритца более высоких порядков, а при этом погрешности, допущенные при вычислении матрицы системы Ритца и столбца ее свободных членов, а также при решении этой системы, могут приобрести существенное значение, коль скоро координатная система взята произвольно. Возникает вопрос об устойчивости метода Ритца по отношению к такого рода малым погрешностям. Относящиеся к этому вопросу основные результаты изложены в последующих пунктах настоящего параграфа.

2. Минимальные и сильно минимальные системы. Будем рассматривать некоторое гильбертово пространство \mathfrak{H} . Последовательность элементов $\varphi_k \in \mathfrak{H}$ (конечная или бесконечная, безразлично) называется минимальной в \mathfrak{H} , если вычеркивание любого элемента этой последовательности сужает натянутое на нее подпространство¹⁾. Вместо термина «минимальная последовательность» употребляют также термин «минимальная система».

Пример 18. Конечная система линейно независимых элементов минимальна: то обстоятельство, что элемент φ_1 не выражается линейно через $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$, означает, что φ_1 не принадлежит подпространству, натянутому на элементы $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$; мы, следовательно, сузили подпространство, натянутое на данные элементы, когда вычеркнули элемент φ_1 .

Пример 19. Конечная система линейно зависимых элементов неминимальна: если φ_1 линейно выражается через $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$, то φ_1 принадлежит подпространству элементов $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ и вычеркивание элемента φ_1 не сужает подпространства.

¹⁾ Определение минимальной последовательности сохраняет силу и тогда, когда гильбертово пространство заменено любым банаховым пространством.

Пример 20. Всякая ортонормированная система минимальна.

Пример 21. В пространстве $\mathfrak{H} = L_2(0, 1)$ система

$$x, \sin \pi x, \sin 2\pi x, \dots, \sin n\pi x, \dots$$

неминимальна. Действительно, вычеркнув элемент x , мы получим полную в $L_2(0, \pi)$ систему

$$\sin \pi x, \sin 2\pi x, \dots, \sin n\pi x, \dots;$$

натянутое на нее подпространство в силу полноты системы совпадает с $L_2(0, \pi)$, и потому вычеркивание элемента x не сузило подпространства.

Пример 22. Последовательность $\{x^k\}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) неминимальна в $L_2(0, 1)$. Это вытекает из известной теоремы Г. Мюнца, в силу которой любая система функций вида x^{μ_k} ($k=0, 1, 2, \dots$), $\mu=0$, полна в $L_2(0, 1)$, если расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k}.$$

Для того чтобы система элементов $\{\varphi_k\}$ была минимальной в данном пространстве \mathfrak{H} , необходимо и достаточно, чтобы в этом пространстве существовала система $\{\psi_k\}$, биортогональная к системе $\{\varphi_k\}$, так что

$$(\varphi_j, \psi_k)_{\mathfrak{H}} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases} \quad (3.173)$$

Всякий базис в пространстве \mathfrak{H} есть система, в этом пространстве минимальная.

Бесконечная система $\{\varphi_k\}$, $\varphi_k \in \mathfrak{H}$, называется сильно минимальной в \mathfrak{H} , если наименьшее собственное число матрицы

$$R_n = \|(\varphi_j, \varphi_k)_{\mathfrak{H}}\|_{j, k=1}^{j, k=n} \quad (3.174)$$

ограничено снизу положительным числом, которое не зависит от n . Всякая сильно минимальная в некотором пространстве система минимальна в этом пространстве.

Всякая ортонормированная в \mathfrak{H} система сильно минимальна в \mathfrak{H} : в этом случае все собственные числа матрицы R_n равны единице при любом n .

Теорема 20. Пусть A и B — операторы, самосопряженные и положительно определенные в некотором гильбертовом пространстве H , и пусть все элементы пространства H_A принадлежат также и пространству H_B . Если $\varphi_k \in H_A$ ($k=1, 2, \dots$) и система $\{\varphi_k\}$ минимальна (соответственно сильно минимальна) в H_B , то она минимальна (соответственно сильно минимальна) и в H_A .

Следствие 1. В условиях теоремы 20 система, ортонормированная в H_B , сильно минимальна в H_A .

Следствие 2. Если A — положительно определенный оператор, то система, минимальная (соответственно сильно минимальная) в H , будет также минимальной (соответственно сильно минимальной) и в H_A . В частности, система, ортонормированная в H , сильно минимальна в H_A .

3. Предельные свойства коэффициентов Ритца. В формуле (см. п. 3 § 2)

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k,$$

дающей выражение n -го приближенного по Ритцу решения, коэффициенты a_k на самом деле зависят еще и от n ; в соответствии с этим будем обозначать эти коэффициенты через $a_k^{(n)}$ и писать

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} \varphi_k. \quad (3.175)$$

Теорема 21. Если координатная система минимальна в H_A , то существуют пределы

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)}. \quad (3.176)$$

Если, кроме того, система, биортогональная в H_A к координатной, ограничена в метрике H_A , то стремление к пределу в формуле (3.176) равномерное относительно k .

Теорема 22. Пусть координатная система сильно минимальна в H_A , и пусть a_k ($k=1, 2, \dots$) суть пределы (3.176). Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$$

сходится, так что последовательность

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots)$$

есть элемент пространства l_2 ; если положить

$$a^{(n)} = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}, 0, 0, \dots),$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| a^{(n)} - a \|_{l_2} = 0.$$

Последнее неравенство означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n |a_k^{(n)} - a_k|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 \right\} = 0.$$

4. Устойчивость метода Ритца. Допустим, что при составлении системы Ритца (3.124) каждое энергетическое произведение $[\varphi_k, \varphi_j]$ вычислено с некоторой малой погрешностью $\gamma_{kj} = \gamma_{jk}$, а свободные члены (f, φ_j) той же системы вычислены также с малыми погрешностями δ_j . Вместо системы (3.124) мы на самом деле получим следующую систему:

$$\sum_{k=1}^n \{ [\varphi_k, \varphi_j] + \gamma_{kj} \} a_k^{(n)'} = (f, \varphi_j) + \delta_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.177)$$

Введем следующие обозначения: $a^{(n)}$, $a^{(n)'}$, $\delta^{(n)}$ — векторы, составляющие которых соответственно равны

$$\begin{aligned} & a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}; \\ & a_1^{(n)'}, a_2^{(n)'}, \dots, a_n^{(n)'}; \\ & \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n; \end{aligned}$$

Γ_n — матрица с элементами γ_{kj} ($j, k = 1, 2, \dots, n$). В n -мерном унитарном пространстве матрица Γ_n порождает оператор, норму которого обозначим через $\| \Gamma_n \|$; как известно¹⁾,

$$\| \Gamma_n \|^2 \leq \sum_{j, k=1}^n |\gamma_{kj}|^2.$$

Будем говорить, что система Ритца устойчива по отношению к малым изменениям ее матрицы и столбца ее сво-

¹⁾ По терминологии, принятой в книге [94], величина $\| \Gamma_n \|$ есть «третья норма» матрицы Γ_n .

бодных членов, если существуют такие не зависящие от n постоянные p и q , что при достаточно малых $\|\Gamma_n\|$ и $\|\delta^{(n)}\|$ верна оценка

$$\|a^{(n)'} - a^{(n)}\| \leq p \|\Gamma_n\| + q \|\delta^{(n)}\|;$$

напомним, что норма любого вектора $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ в унитарном пространстве n измерений определяется формулой

$$\|t\|^2 = \sum_{k=1}^n |t_k|^2.$$

Пусть координатная система сильно минимальна в H_A , и пусть $\tilde{\lambda} > 0$ — нижняя граница собственных чисел матрицы Ритца.

Если погрешности γ_{kj} настолько малы, что $\|\Gamma_n\| \leq \tilde{\lambda}\beta$, $\beta < 1$, то

$$\|a^{(n)'} - a^{(n)}\| \leq \frac{\tilde{\lambda}^{-3/2} |u_0| \|\Gamma_n\| + \tilde{\lambda}^{-1} \|\delta^{(n)}\|}{1 - \beta}. \quad (3.178)$$

Оценка (3.178) означает, что верна следующая теорема.

Теорема 23. Если координатная система сильно минимальна в H_A , то решение системы Ритца устойчиво по отношению к малым изменениям ее матрицы и столбца ее свободных членов.

Теорема 24 [109]. Если координатная система сильно минимальна в H_A , то приближенное решение по Ритцу устойчиво по отношению к малым изменениям матрицы системы Ритца и столбца свободных членов этой системы.

Поясним утверждение этой теоремы. Пусть

$$u'_n = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)'} \varphi_k,$$

где коэффициенты $a_k^{(n)'}$ удовлетворяют системе (3.177). Если координатная система сильно минимальна в H_A , а $\|\Gamma_n\|$ и $\|\delta^{(n)}\|$ достаточно малы, то существуют такие постоянные p_1 и q_1 , не зависящие от n , что $|u'_n - u_n| \leq p_1 \|\Gamma_n\| + q_1 \|\delta^{(n)}\|$.

Пример 23 [62]. Рассмотрим упругую пластинку в форме кольцевого сектора; величины, характеризующие размеры пластинки, обозначены на рис. 16. Пластинка подвержена действию равномерного давления q ; внутренний дуговой край пластинки жестко закреплен, остальная часть края свободна.

Через r и θ обозначим полярные координаты и положим

$$\varrho = \frac{r-b}{a}, \quad \vartheta = \frac{\theta - \frac{1}{2}\theta_0}{\theta_0},$$

$$0 \leq \varrho \leq \varrho_0 = \frac{a-b}{a}, \quad -\frac{1}{2} \leq \vartheta \leq \frac{1}{2}.$$

Обозначим еще через w прогиб пластинки, через D ее жесткость и через \tilde{w} безразмерную величину

$$\tilde{w} = \frac{Dw}{qa^2};$$

функция \tilde{w} реализует минимум функционала -

$$\iint \left[\left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\sigma \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} - \frac{2}{a^2} \tilde{w} \right] dx dy$$

на множестве функций, обращающихся в нуль при $\varrho=0$; эта функция определялась по методу Ритца, причем вычисления производились дважды, с двумя системами координатных функций. Функции первой системы имели вид

$$w_{ij} = \varrho^{i+2} \vartheta^{2j} \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots);$$

вторая система была получена из первой следующим приемом ортогонализации: отдельно были подвергнуты ортогонализации в промежутке $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$ функции $\varphi_i(\varrho) = \varrho^{i+2}$ и в промежутке

$-\frac{1}{2} \leq \vartheta \leq \frac{1}{2}$ — функции $\psi_j(\vartheta) = \vartheta^{2j}$. Полученные таким образом ортонормированные функции от одной переменной обозначим через $\bar{\varphi}_i(\varrho)$ и $\bar{\psi}_j(\vartheta)$; функции второй координатной системы имеют вид

$$\bar{w}_{ij} = \bar{\varphi}_i(\varrho) \bar{\psi}_j(\vartheta) \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots).$$

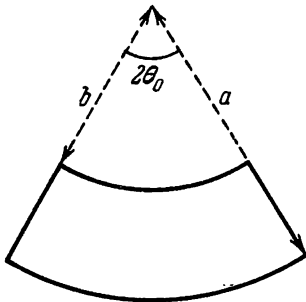


Рис. 16.

Можно доказать, что функции первой координатной системы не сильно минимальны в энергетическом пространстве нашей задачи; функции второй системы сильно минимальны в том же пространстве.

Вычисления были проведены для пластинки, у которой $q_0 = 1,82$; $\theta_0 = 48^\circ$. Было использовано 12 координатных функций каждой координатной системы, именно были использованы функции w_{ij} с индексами $i = 0, 1, 2, 3$ и $j = 0, 1, 2$ из первой координатной системы и полученные из них упомянутым выше процессом ортогонализации функции \bar{w}_{ij} второй координатной системы. Приведем значения соответствующих функций $\bar{\varphi}_i(q)$ и $\bar{\psi}_i(\theta)$:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_0(q) &= \sqrt{5}q^2, & \bar{\varphi}_1(q) &= 6\sqrt{7}\left(q^3 - \frac{5}{6}q^2\right), \\ \bar{\varphi}_2(q) &= 84\left(q^4 - \frac{3}{2}q^3 + \frac{15}{28}q^2\right), \\ \bar{\varphi}_3(q) &= 120\sqrt{11}\left(q^5 - \frac{21}{10}q^4 + \frac{7}{5}q^3 - \frac{7}{24}q^2\right), \\ \bar{\psi}_0(\theta) &= 1, & \bar{\psi}_1(\theta) &= 6\sqrt{5}\left(\theta^2 - \frac{1}{12}\right), \\ \bar{\psi}_2(\theta) &= 210\left(\theta^4 - \frac{3}{14}\theta^2 + \frac{3}{560}\right).\end{aligned}$$

Вычисления производились на ЭВМ «Стрела»; эта машина считает с девятью десятичными разрядами. В программе были предусмотрены команды, позволяющие заменить в элементах матрицы Ритца 1, 3 или 5 последних десятичных разрядов нулями и тем самым внести определенную погрешность в матрицу Ритца. При фактическом производстве вычислений нулем заменялся только девятый десятичный разряд. При этом самое решение системы Ритца, как точной, так и содержащей погрешность, проводилось с достаточной точностью, так что ошибками округления, по всей видимости, здесь можно было пренебречь.

Приведем некоторые результаты вычислений. Обозначим через δ_a , δ_w , δ_M соответственно относительные погрешности в коэффициентах Ритца, прогибах, моментах в случае применения первой координатной системы; для второй координатной системы мы обозначим аналогичные величины через $\bar{\delta}_a$, $\bar{\delta}_w$, $\bar{\delta}_M$. Приведем табличку отношений δ_a/δ_0 и $\bar{\delta}_a/\bar{\delta}_0$,

где $\delta_0 = 10^{-7}$ есть верхняя граница относительной погрешности элементов матрицы Ритца, в которых девятый десятичный разряд заменен нулем.

i, j	0,0	1,0	0,1	1,1	2,0	0,2
δ_a/δ_0	875	3930	54 400	126 800	10 900	13 000
$\bar{\delta}_a/\delta_0$	0,195	0,692	0,550	0,314	0,521	2,82

i, j	2,1	1,2	2,2	3,0	3,1	3,2
δ_a/δ_0	34 700	16 900	20 200	23 600	58 000	22 900
$\bar{\delta}_a/\delta_0$	0,67	0,47	0,595	39,7	2,13	0,957

Таким образом, при использовании первой, не сильно минимальной координатной системы погрешности коэффициентов Ритца чрезвычайно велики по отношению к погрешности элементов матрицы Ритца—отношение этих погрешностей есть величина порядка 10^4 — 10^5 . При использовании второй, сильно минимальной координатной системы названное отношение резко падает—оно меньше единицы, за исключением двух случаев, когда $2 < \bar{\delta}_a/\delta_0 < 3$, и одного случая, когда $\bar{\delta}_a/\delta_0 = 39,7$.

Из приведенных в статье [62] результатов видно, что, например, на внешнем дуговом крае пластинки отношение δ_w/δ_0 колеблется в пределах от 35,9 до 82,4, отношение δ_M/δ_0 —в пределах от 272 до 1520; отношения же $\bar{\delta}_w/\delta_0$ и $\bar{\delta}_M/\delta_0$ изменяются в пределах от 0,10 до 0,23 и от 1,37 до 2,95 соответственно.

Приведенные здесь результаты показывают бесспорное преимущество сильно минимальных координатных систем перед не сильно минимальными.

5. О числе обусловленности матрицы Ритца. В предшествующих пунктах настоящего параграфа предполагалось, что система Ритца решается точно, так что погрешности возникают только при составлении этой системы. Однако при решении системы неизбежны ошибки округления. Если координатная система только сильно минимальна в H_A , то число обусловленности матрицы Ритца, равное отношению ее наибольшего и наименьшего собственных чисел, может возрасти до бесконечности вместе с n и решение системы Ритца может оказаться неустойчивым по отношению к ошибкам округления. Очевидно, число обусловленности матрицы Ритца будет ограничено независимо от n , если ее собственные числа будут ограничены сверху и снизу положительными числами.

Укажем условие, при котором только что сформулированное свойство имеет место. Наряду с данным оператором A рассмотрим еще один положительно определенный оператор B . Пусть оба оператора таковы, что пространства H_A и H_B состоят из одних и тех же элементов; для этого необходимо и достаточно, чтобы существовали такие постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 < \infty$, что

$$c_1 |u|_B \leq |u|_A \leq c_2 |u|_B.$$

Если при решении уравнения $Au = f$ принять за координатную любую ортонормированную и полную в H_B систему, то собственные числа матрицы Ритца будут ограничены сверху и снизу теми же положительными числами c_1 и c_2 ; число обусловленности матрицы Ритца ограничено величиной c_2/c_1 .

6. Сходимость невязки к нулю. Если уравнение $Au = f$, где A — положительно определенный оператор, действующий в данном гильбертовом пространстве H , решается по методу Ритца и u_n есть приближенное по Ритцу решение этого уравнения, то в общем случае Au_n не стремится к f при $n \rightarrow \infty$. Это ясно хотя бы потому, что координатные элементы, а с ними и приближенное решение u_n не обязаны входить в область определения оператора A , а тогда выражение Au_n может просто оказаться лишенным смысла. Но и в том случае, когда координатные элементы $\varphi_k \in D(A)$, равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} Au_n = f$, вообще говоря, не имеет места.

Можно доказать, что если при любом выборе координатной системы, элементы которой принадлежат области определения $D(A)$ оператора A , имеет место упомянутое выше равенство, так что «невязка» $Au_n - f$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то оператор A необходимо ограничен.

Однако при специальном выборе координатной системы невязка может стремиться к нулю и тогда, когда оператор A не ограничен.

Один такой способ выбора дает следующая

Теорема 25 [69], [98a]. Пусть A и B — положительно определенные самосопряженные операторы такие, что $D(A) = D(B)$ и имеет место неравенство

$$|(Au, Bu)| \geq m \|Au\|^2, \quad m = \text{const} > 0;$$

пусть последовательность собственных элементов оператора B полна в исходном пространстве H . Если собственные элементы оператора B принять за координатные при построении приближенного решения уравнения $Au = f$, то невязка $Au_n - f$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

§ 8. Подбор координатных функций

1. Построение полной координатной системы. При выборе координатной системы следует прежде всего позаботиться о ее полноте в энергетическом пространстве. В этом смысле оказывается полезной следующая

Теорема 26. Пусть $\varphi_n \in D(A)$ ($n = 1, 2, \dots$), где A — положительно определенный оператор, и пусть последовательность $\{A\varphi_n\}$ полна в данном гильбертовом пространстве H . Тогда последовательность $\{\varphi_n\}$ полна в энергетическом пространстве H_A .

При установлении полноты системы координатных функций полезно и такое замечание: если A и B — положительно определенные операторы и пространства H_A и H_B состоят из одних и тех же элементов, то любая система, полная в H_B , полна в H_A , и наоборот.

Пример 24. Рассмотрим уравнение

$$Au = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

где $p(x) \geq p_0 = \text{const} > 0$, $q(x) \geq 0$.

Положим

$$Bu = -\frac{d^2u}{dx^2}, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Пространства H_A и H_B состоят из одних и тех же элементов, а именно из функций, для которых $u(0) = u(1) = 0$ и

$$\int_0^1 u'^2(x) dx < \infty;$$

поэтому полноту достаточно проверять в H_B . Но полнота системы функций $\{\varphi_n(x)\}$ в H_B есть полнота системы производных $\{\varphi'_n(x)\}$ в подпространстве функций, ортогональных к единице, пространства $L_2(0, 1)$. Отсюда легко заключить, что функции

$$\varphi_n(x) = x^n(1-x) \quad (n=1, 2, \dots)$$

образуют систему, полную в H_A .

Пример 25. Рассмотрим задачу

$$Au = \sum_{k=0}^s (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} \right) = f(x),$$

$$u(0) = u'(0) = \dots = u^{(s-1)}(0) = 0,$$

$$u(1) = u'(1) = \dots = u^{(s-1)}(1) = 0.$$

Пусть $p_s(x) \geq p_0 = \text{const} > 0$, а остальные коэффициенты $p_x(x)$ таковы, что оператор A при краевых условиях задан положительно определенный.

Система координатных функций

$$\varphi_n(x) = x^{n+s} (1-x)^s \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

полна в H_A .

Пример 26. Пусть $\omega(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ — уравнение границы S области Ω . Допустим, что $\omega > 0$ внутри Ω и что эта функция и ее первые производные непрерывны в $\Omega + S$. Система координатных функций

$$\omega(x_1, x_2, \dots, x_m) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m},$$

в которых n_1, n_2, \dots, n_m пробегают независимо все целые значения от нуля до бесконечности, полна в H_A , где

$$Au = - \sum_{j, k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + Cu, \quad u|_S = 0,$$

есть невырождающийся положительно определенный эллиптический оператор.

Пример 27. В примере 24 можно в качестве координатных выбрать собственные функции оператора $Bu = -\frac{d^2u}{dx^2}$, $u(0) = u(1) = 0$. Это суть функции $\sin n\pi x$ ($n = 1, 2, \dots$).

В примере 26 можно за координатные выбрать собственные функции оператора Лапласа для области Ω .

2. Требования к рациональному выбору координатной системы. Утверждения настоящего пункта основаны на результатах § 7.

Если дело идет о построении грубого приближения по Ритцу, с использованием небольшого числа координатных элементов, то достаточно подчинить координатную систему следующим требованиям:

1) Все элементы координатной системы принадлежат энергетическому пространству данной задачи. В частности, если дело идет о краевой задаче для дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений, то координатные функции должны: а) иметь всевозможные обобщенные производные порядка $\leq k$, где k — наивысший порядок производных, входящих в интеграл энергии (или, что то же, в выражение квадрата энергетической нормы); б) сообщать интегралу энергии конечное значение; в) удовлетворять всем главным краевым условиям данной задачи.

2) Взятые в любом конечном числе, координатные элементы линейно независимы.

3) Координатная система полна в энергетическом пространстве данной задачи.

Перечисленных требований недостаточно, если желательно построить приближенное по Ритцу решение с малой погрешностью. Для этого необходимо использовать большое число координатных элементов, а тогда следует позаботиться об устойчивости как процесса решения системы Ритца, так и самого приближенного решения. Желательно также, если

это возможно, добиться улучшения сходимости приближенного решения к точному; так, например, желательно добиться того, чтобы невязка приближенного решения стремилась к нулю. Целесообразно поэтому по возможности добиваться того, чтобы координатные элементы обладали следующими свойствами:

4а) Координатная система сильно минимальна в энергетическом пространстве H_A ; в этом случае решение системы Ритца для уравнения $Au=f$, а также само приближенное решение устойчивы.

4б) Два положительно определенных оператора A и B назовем полусходными, если их энергетические пространства H_A и H_B состоят из одних и тех же элементов. Пусть последовательность $\{\varphi_k\}$ полна и ортонормирована в H_B ; если эту последовательность принять за координатную для уравнения $Au=f$, то устойчивы и решение системы Ритца, и приближенное по Ритцу решение этого уравнения, а число обусловленности матрицы Ритца ограничено независимо от n .

4в) Два самосопряженных положительно определенных оператора A и B назовем сходными, если их области определения совпадают, так что $D(A)=D(B)$. Допустим, что имеет место неравенство

$$|(Au, Bu)| \geq m \|Au\|^2, \quad m = \text{const} > 0,$$

и система собственных элементов оператора B , которую мы будем считать нормированной в H_B , полна в H_B . Тогда эта система полна и в H_A ; если ее принять за координатную для уравнения $Au=f$, то как решение системы Ритца, так и приближенное по Ритцу решение устойчивы, число обусловленности матрицы Ритца ограничено независимо от n и при $n \rightarrow \infty$ невязка $Au_n - f$ стремится к нулю.

3. Одномерные краевые задачи. В этом пункте приводятся несколько примеров выбора координатных систем для решения краевых задач, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями; эти примеры, разумеется, не исчерпывают всех возможных случаев. Во всех примерах настоящего пункта исходным гильбертовым пространством является пространство $L_2(0, 1)$.

Пример 28. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x) \quad (3.179)$$

при краевых условиях

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (3.180)$$

Мы допускаем, что функции $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ непрерывны на отрезке $[0, 1]$, $p(x) \geq \tilde{p} = \text{const} > 0$, $q(x) > -\lambda_1$, где λ_1 — наименьшее собственное число оператора (3.179), (3.180) при $q(x) \equiv 0$. Сходным с оператором данной задачи является оператор $B = -\frac{d^2}{dx^2}$ при тех же краевых условиях (3.180); его собственные функции, нормированные в H_B , суть

$$\varphi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{n\pi} \sin n\pi x \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (3.181)$$

если эти функции принять за координатные для задачи (3.179), (3.180), то справедливы утверждения 4в) п. 2.

Пример 29. Рассмотрим теперь уравнение (3.179) при краевых условиях

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \quad (3.182)$$

Для оператора задачи (3.179), (3.182) сходным является дифференциальный оператор $-\frac{d^2}{dx^2}$ при краевых условиях (3.182); его собственные функции, нормированные в метрике соответствующего этому оператору энергетического пространства, суть

$$\varphi_n(x) = \frac{2\sqrt{2}}{(2n-1)\pi} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (3.183)$$

применение этих функций в качестве координатных гарантирует справедливость утверждений 4в) п. 2.

Пример 30. Рассмотрим уравнение (3.179) при краевых условиях

$$u'(0) = u'(1) = 0; \quad (3.184)$$

коэффициент $q(x)$ будем считать таким, чтобы оператор задачи (3.179), (3.184) был положительно определенным; для этого достаточно, например, чтобы $q(x)$ было строго

положительным. Для упомянутого оператора сходным будет положительно определенный оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + I$ (I — тождественный оператор) при краевых условиях (3.184). Нормированные в соответствующем энергетическом пространстве собственные функции этого оператора суть

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{n^2\pi^2 + 1}} \cos n\pi x \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (3.185)$$

их применение в задаче (3.179), (3.185) гарантирует справедливость утверждений 4в) п. 2.

Пример 31. Пусть дифференциальное уравнение (3.179) решается при краевых условиях

$$u'(0) - \alpha u(0) = 0, \quad u'(1) + \beta u(1) = 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (3.186)$$

Сходным в этом случае является оператор $-\frac{d^2}{dx^2}$ при тех же условиях (3.186). Однако построение собственных функций сходного оператора связано с решением некоторого трансцендентного уравнения и потому затруднительно. Если это затруднение преодолеть не удастся, то нетрудно построить все же оператор, полусходный с оператором (3.179), (3.186). Таков, например, рассмотренный в примере 30 оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + I$ при краевых условиях (3.184); если систему (3.185) его собственных функций принять за координатную при решении задачи (3.179), (3.186), то будут верны утверждения 4б) п. 2. Полусходным с оператором (3.179), (3.186) является также оператор

$$Bu = -\frac{d^2u}{dx^2}, \quad u'(0) - u(0) = 0, \quad u'(1) = 0, \quad (3.187)$$

которому соответствуют энергетические производные и норма

$$\left. \begin{aligned} [u, v]_B &= u(0)\overline{v(0)} + \int_0^1 u'(x)\overline{v'(x)} dx, \\ \|u\|_B &= |u(0)|^2 + \int_0^1 |u'(x)|^2 dx. \end{aligned} \right\} \quad (3.188)$$

Нетрудно построить последовательность функций, ортонормированную и полную в метрике (3.188); такова, например,

система

$$1, x, \frac{\sqrt{2} \sin \pi x}{\pi}, \frac{\sqrt{2} \sin 2\pi x}{2\pi}, \dots, \frac{\sqrt{2} \sin n\pi x}{n\pi}, \dots \quad (3.189)$$

Если функции (3.189) использовать как координатные при решении задачи (3.179), (3.186), то будут справедливы утверждения 4б) п. 2.

Пример 32. На практике представляет интерес и тот случай, когда функция $p(x)$ разрывна (чаще всего, кусочно-непрерывна). Допустим, что функция $p(x)$, будучи разрывной, удовлетворяет неравенствам $\tilde{p} \leq p(x) \leq p_1$, где \tilde{p} и p_1 — положительные постоянные. Применение координатных функций, указанных в примерах 23—31, гарантирует справедливость утверждений 4б) п. 2.

Пример 33. Рассмотрим случай вырожденного уравнения. Пусть в уравнении (3.179)

$$p(x) = x^\alpha p_1(x), \quad (3.190)$$

где $0 < \alpha < 2$, а функция $p_1(x)$ ограничена сверху и снизу положительными числами. Уравнение (3.179) будем решать при следующих краевых условиях:

$$\left. \begin{aligned} u(0) = u(1) = 0, & \quad 0 < \alpha < 1, \\ u(1) = 0, & \quad 1 \leq \alpha < 2. \end{aligned} \right\} \quad (3.191)$$

Сходным с оператором (3.179), (3.191) будет в данном случае оператор, определяемый дифференциальным выражением $Bu = -\frac{d}{dx} \left(x^\alpha \frac{du}{dx} \right)$ при тех же условиях (3.191); собственные функции этого оператора суть

$$\varphi_n(x) = c_n x^{\frac{1-\alpha}{2}} J_\nu \left(\gamma_{\nu, n} x^{1-\frac{\alpha}{2}} \right), \quad \nu = \left| \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \right| \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (3.192)$$

здесь $\gamma_{\nu, n}$ — n -й положительный корень функции Бесселя $J_\nu(x)$, а постоянная c_n должна быть выбрана так, чтобы $[\varphi_n]_B = 1$. Приведем значение этой постоянной:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{2-\alpha}} \left\{ \int_0^1 z^{2-\alpha} \left[\frac{d}{dz} (z^\pm \nu J_\nu(\gamma_{\nu, n} z)) \right]^2 dz \right\}^{-\frac{1}{2}};$$

знак плюс берется при $\alpha < 1$, знак минус — при $\alpha > 1$.

4. Двумерные краевые задачи. Собственные функции оператора $B = -\Delta$ (Δ — оператор Лапласа) для единичного круга при условии, что на окружности круга упомянутые функции обращаются в нуль, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{k,n}(x, y) &= c_{k,n} J_k(\gamma_{k,n} r) \frac{\cos k\theta}{\sin k\theta} \\ (k=0, 1, 2, \dots; n=1, 2, 3, \dots) \quad x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta; \end{aligned} \right\} \quad (3.193)$$

коэффициент $c_{k,n}$ таков, что $|\varphi_{k,n}|_B = 1$.

Рассмотрим задачу

$$-\sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + Cu = f(x_1, x_2), \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad (3.194)$$

$$u|_S = 0. \quad (3.195)$$

Здесь S — граница конечной области Ω ; мы примем, что эта граница достаточно гладкая, так что угол между нормалью и осью x имеет по крайней мере две непрерывные производные. Далее, примем, что A_{jk} и C суть функции от x и y такие, что дифференциальный оператор (3.194) эллиптический невырожденный, а оператор задачи (3.194), (3.195) положительно определенный; примем также, что функция C непрерывна, а функции A_{jk} непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + S$.

Допустим, что преобразование

$$x = \varphi(x', y'), \quad y = \psi(x', y') \quad (3.196)$$

взаимно однозначно преобразует единичный круг K плоскости (x', y') в область Ω плоскости (x, y) , причем функции (3.196) дважды непрерывно дифференцируемы, а их якобиан

$$J = \frac{D(x, y)}{D(x', y')}$$

ограничен сверху и снизу положительными постоянными.

Преобразование (3.196) переводит задачу (3.194), (3.195) в следующую:

$$-\sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(A'_{jk} \frac{\partial u}{\partial x'_k} \right) + CJu = Jf, \quad x'_1 = x', \quad x'_2 = y', \quad (3.197)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (3.198)$$

Здесь Γ —единичная окружность в плоскости (x', y') и

$$A'_{jk} = J \sum_{r, s=1}^2 A_{rs} \frac{\partial x'_j}{\partial x_r} \frac{\partial x'_k}{\partial x_s}.$$

Оператор задачи (3.197), (3.198) сходный с оператором $B = -\Delta$, упомянутым в начале настоящего пункта; применение функций (3.193) в качестве координатных гарантирует справедливость утверждений 4в) п. 2.

Можно указать некоторые случаи, когда преобразование (3.196) строится просто.

1) Известно конформное преобразование круга на область Ω .

2) Пусть область Ω такова, что прямые, параллельные оси x , пересекают границу S не более чем в двух точках. Расположим ось x посередине между параллельными ей опорными прямыми (рис. 17), расстояние между которыми обозначим через $2c$. Прямая

$y = y_0$, $|y_0| < c$, пересекает контур S в точках, абсциссы которых обозначим через $\alpha(y)$ и $\beta(y)$. Положим

$$x' = x\mu(y) - \nu(y), \quad y' = \frac{1}{c}y, \quad (3.199)$$

где

$$\mu(y) = \frac{2\sqrt{c^2 - y^2}}{c[\beta(y) - \alpha(y)]}, \quad \nu(y) = \frac{\beta(y) + \alpha(y)}{\beta(y) - \alpha(y)} \frac{\sqrt{c^2 - y^2}}{c}. \quad (3.200)$$

Пусть контур S таков, что функции (3.200) имеют непрерывные вторые производные при $|y| \leq c$; тогда функции (3.199) осуществляют взаимно однозначное и дважды непрерывно дифференцируемое отображение области Ω на единичный круг.

Пример 34. Если Ω —внутренность эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

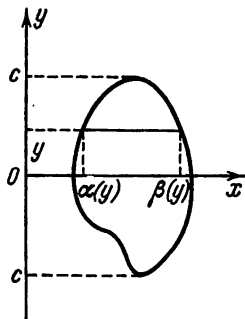


Рис. 17.

то $\mu(y) = \frac{1}{a}$, $\nu(y) = 0$ и преобразование имеет вид $x' = \frac{x}{a}$, $y' = \frac{y}{b}$.

Пусть контур S кусочно-гладкий. В этом случае оператор задачи (3.194), (3.195) по крайней мере полусходный с оператором задачи Дирихле; поэтому, взяв в качестве координатных собственные функции задачи Дирихле для оператора Лапласа и соответствующей области, мы обеспечим выполнение утверждений 4б) п. 2.

По-прежнему под оператором A будем понимать оператор задачи (3.194), (3.195) для соответствующим образом преобразованной области, а под оператором B — оператор $-\Delta$ для той же области.

3) Пусть область Ω имеет вид, изображенный на рис. 18. Тогда преобразование (3.199), (3.200) (предполагая, что функции (3.200) имеют непрерывные вторые производные) переводит область Ω в полукруг, для которого собственные

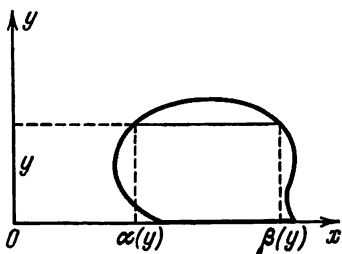


Рис. 18.

функции оператора Лапласа суть

$$c_{k,n} J_k(\gamma_{k,n} r) \sin k\theta \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (3.201)$$

$c_{k,n}$ — нормирующий множитель.

4) Область рисунка 19 можно в известных условиях отобразить на круговой сектор с центральным углом β .

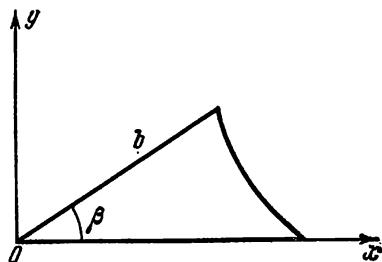


Рис. 19.

Допустим, что $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ и что прямая $y = \text{const}$ пересекает границу области Ω только в двух точках $x = ky$ и $x = \alpha(y)$, $k = \text{ctg } \beta$. Преобразование

$$x' = \frac{1}{b} \left\{ ky + (x - ky) \frac{\sqrt{b^2 - y^2 - ky}}{\alpha(y) - ky} \right\}, \quad y' = \frac{1}{b} y \quad (3.202)$$

переводит Ω в круговой сектор рис. 20; мы допустим при этом, что отношение

$$\frac{\sqrt{b^2 - y^2} - ky}{a(y) - ky} \quad (3.203)$$

непрерывно дифференцируемо при $0 \leq y \leq b \sin \beta$. Собственные функции оператора Лапласа для сектора рис. 20 суть

$$c_{k,n} J_{\frac{k\pi}{\beta}} \left(\sqrt{\frac{a(y) - ky}{b^2 - y^2}} r \right) \sin \frac{k\pi\theta}{\beta} \quad (3.204)$$

($k = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$).

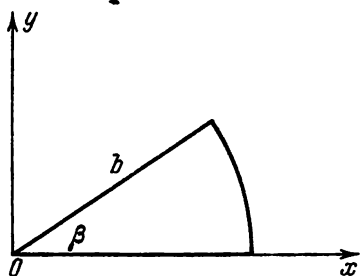


Рис. 20.

Пример 35. Для прямолинейного треугольника (рис. 21) с острым углом β

$$a(y) = a + \frac{b \cos \beta - a}{b \sin \beta} y;$$

дробь (3.203) принимает вид

$$\frac{b \sin \beta}{a} \frac{\sqrt{b^2 - y^2} - y \operatorname{ctg} \beta}{b \sin \beta - y}$$

и бесконечно дифференцируема при $0 \leq y \leq b \sin \beta$.

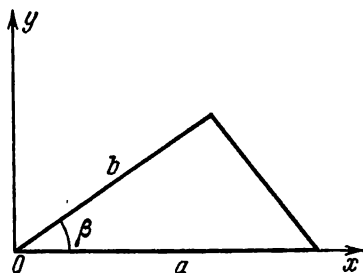


Рис. 21.

5) Иногда целесообразно отобразить область Ω на прямоугольник, для которого собственные функции оператора Лапласа хорошо известны: если прямоугольник задан неравенствами $0 \leq x' \leq a$, $0 \leq y' \leq b$, то упомянутые собственные функции, нормированные в метрике интеграла Дирихле, имеют вид

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}} \sin \frac{k\pi x'}{a} \sin \frac{n\pi y'}{b} \quad (k, n = 1, 2, \dots). \quad (3.205)$$

Так, пусть Ω имеет вид трапеции (рис. 22), каждая из «боковых сторон» которой пересекается с прямой $y = \text{const}$ только в одной точке; пусть $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ — абсциссы точек пересечения. Примем, что эти две функции дважды непре-

равно дифференцируемы. Преобразование

$$x' = \frac{x - \alpha(y)}{\beta(y) - \alpha(y)}, \quad y' = \frac{1}{b} y \quad (3.206)$$

отображает область рис. 22 на квадрат $0 \leq x, y \leq 1$.

Область рис. 23 можно сперва отобразить на область рис. 22, введя координаты x_1, y_1 , где

$$y_1 = \arctg \frac{y}{x}.$$

Пример 36. В квадрате $0 \leq x, y \leq 1$ рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} -\Delta u - 9(x^2 + y^2)u &= \\ &= -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \\ &- 9(x^2 + y^2)u = f(x, y) \end{aligned}$$

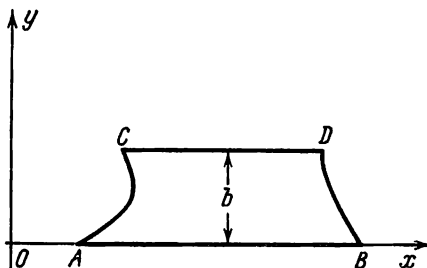


Рис. 22.

при краевом условии $u|_S = 0$, где S — контур квадрата. Оператор этой задачи положительно определенный (см. п. 9 § 4) и сходный с оператором $-\Delta u, u|_S = 0$. Неравенство теоремы 25 в данном случае выполняется. В качестве координатных функций целесообразно взять собственные функции последнего оператора, нормированные в его энергетической метрике; по формуле (3.205) это будут функции

$$\frac{2}{\pi \sqrt{k^2 + n^2}} \sin k\pi x \sin n\pi y$$

($k, n = 1, 2, \dots$).

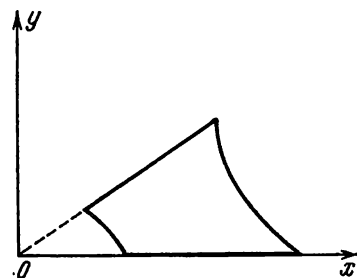


Рис. 23.

для чего оценим постоянные c_1 и c_2 , входящие в неравенство п. 5 § 7. Обозначим через A оператор нашей задачи, через B — оператор $-\Delta$ при краевом условии $u|_S = 0$. Имеем:

$$|u|_A^2 = \iint_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy - 9 \iint_0^1 (x^2 + y^2) u^2 dx dy,$$

$$|u|_B^2 = \iint_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy.$$

Отсюда $|u|_A \leq |u|_B$ и, следовательно, можно положить $c_2 = 1$. Далее, наименьшее собственное число оператора B , как хорошо известно, равно $2\pi^2$, поэтому, если $u \in H_B$, то $\frac{|u|_B^2}{\|u\|^2} \geq 2\pi^2$, или

$$\iint_0^1 u^2 dx dy \leq \frac{1}{2\pi^2} |u|_B^2.$$

Теперь

$$9 \iint_0^1 (x^2 + y^2) u^2 dx dy \leq 18 \iint_0^1 u^2 dx dy \leq \frac{9}{\pi^2} |u|_B^2,$$

поэтому

$$|u|_A^2 \geq \left(1 - \frac{9}{\pi^2}\right) |u|_B^2$$

и можно взять $c_1 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\pi^2 - 9}$. Число обусловленности матрицы Ритца не превосходит величины

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 - 9}} < 4,5.$$

Если систему Ритца подвергнуть преобразованию (3.33), то ее можно решать итерациями, которые при любом порядке системы сходятся, как прогрессия с знаменателем

$$\frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 9}}{\pi + \sqrt{\pi^2 - 9}} < 0,55.$$

Для матриц Ритца конкретных порядков результаты могут оказаться и лучшими. Возьмем, например, матрицу 6-го порядка, которая получится, если мы ограничимся координатными функциями:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{2}{\pi\sqrt{2}} \sin \pi x \sin \pi y, & \varphi_2 &= \frac{2}{\pi\sqrt{5}} \sin \pi x \sin 2\pi y, \\ \varphi_3 &= \frac{2}{\pi\sqrt{5}} \sin 2\pi x \sin \pi y, & \varphi_4 &= \frac{2}{\pi\sqrt{10}} \sin \pi x \sin 3\pi y, \\ \varphi_5 &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sin 2\pi x \sin 2\pi y, & \varphi_6 &= \frac{2}{\pi\sqrt{10}} \sin 3\pi x \sin \pi y, \end{aligned}$$

для которых $k + n \leq 4$. Матрица Ритца тогда имеет следующий вид (см. стр. 313):

$1 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2}\right) \pi^2$	$-\frac{16}{9\sqrt{10}\pi^4}$	$-\frac{16}{9\sqrt{10}\pi^4}$	$-\frac{16}{9\sqrt{10}\pi^4}$	$\frac{3}{32\sqrt{5}\pi^4}$	0	$\frac{3}{32\sqrt{5}\pi^4}$
$-\frac{16}{9\sqrt{10}\pi^4}$	$1 + \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{32\pi^2}\right) \frac{4}{5\pi^2}$	0	0	$-\frac{48}{125\sqrt{2}\pi^4}$	$-\frac{8}{9\sqrt{10}\pi^4}$	0
$-\frac{16}{9\sqrt{10}\pi^4}$	0	$1 + \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{32\pi^2}\right) \frac{4}{5\pi^2}$	0	0	$-\frac{8}{9\sqrt{10}\pi^4}$	$-\frac{48}{125\sqrt{2}\pi^4}$
$\frac{3}{32\sqrt{5}\pi^4}$	$-\frac{48}{125\sqrt{2}\pi^4}$	0	0	$1 + \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{36\pi^2}\right) \frac{2}{5\pi^2}$	0	0
0	$-\frac{8}{9\sqrt{10}\pi^4}$	$-\frac{8}{9\sqrt{10}\pi^4}$	0	0	$1 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{16\pi^2}\right) \frac{1}{2\pi^2}$	0
$\frac{3}{32\sqrt{5}\pi^4}$	0	$-\frac{48}{125\sqrt{2}\pi^4}$	0	0	0	$1 + \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{36\pi^2}\right) \frac{2}{5\pi^2}$

Приближенные значения собственных чисел более общего уравнения $Au - \lambda Bv = 0$ находятся как корни уравнения

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda (B\varphi_1, \varphi_1) & (A\varphi_2, \varphi_1) - \lambda (B\varphi_2, \varphi_1) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_1) - \lambda (B\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2) - \lambda (B\varphi_1, \varphi_2) & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda (B\varphi_2, \varphi_2) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_2) - \lambda (B\varphi_n, \varphi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A\varphi_1, \varphi_n) - \lambda (B\varphi_1, \varphi_n) & (A\varphi_2, \varphi_n) - \lambda (B\varphi_2, \varphi_n) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda (B\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.210)$$

2. Достаточный признак сходимости. Предположим, что оператор A имеет вид $A = A_0 + B$, где A_0 — положительно определенный в данном гильбертовом пространстве H оператор, и $D(B) \supset D(A)$. Допустим еще, что оператор $A_0^{-1}B$ вполне непрерывен в энергетическом пространстве H_{A_0} . Координатные элементы φ_n выберем так, чтобы: 1) они входили в $D(A_0)$; 2) взятые в любом конечном числе, они были линейно независимы; 3) их совокупность была полна в H_{A_0} . В перечисленных условиях верны следующие теоремы.

Теорема 27. Приближенные решения уравнения, построенные по методу Бубнова — Галёркина, существуют при достаточно больших n и сходятся в норме пространства H_{A_0} к точному решению данного уравнения, если это последнее разрешимо и имеет только одно решение.

Теорема 28. Приближенные собственные числа уравнения $A_0u - \lambda Bv = 0$, построенные по методу Бубнова — Галёркина, сходятся к соответствующим точным значениям этих чисел.

3. Применение к задачам математической физики. Мы перечислим здесь некоторые задачи, к которым применимы теоремы 27 и 28.

Уравнение

$$(-1)^s \frac{d^s}{dx^s} \left(p(x) \frac{d^s u}{dx^s} \right) + Bv = f(x) \quad (3.211)$$

при краевых условиях

$$\left. \begin{aligned} u(a) = u'(a) = \dots = u^{(s-1)}(a) &= 0, \\ u(b) = u'(b) = \dots = u^{(s-1)}(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.212)$$

допускает применение метода Бубнова — Галёркина, если $p(x) \geq p_0$, где p_0 — положительная постоянная и B — дифференциальный оператор порядка $\leq 2s - 1$ с ограниченными коэффициентами.

Метод Бубнова—Галёркина применим к невырождающемуся уравнению эллиптического типа

$$-\sum_{j, k=1}^m A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^m B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Cu = f(x) \quad (3.213)$$

при краевых условиях задачи Дирихле

$$u|_S = 0 \quad (3.214)$$

или смешанной

$$\left[\sum_{l, k=1}^m A_{lk} \frac{\partial u}{\partial x_l} \cos(\nu, x_k) + \sigma u \right]_S = 0; \quad (3.215)$$

задача Неймана ($\sigma \equiv 0$) не представляет исключения.

Приближенные собственные числа, построенные по методу Галёркина, для уравнения

$$(-1)^s \frac{d^s}{dx^s} \left(p(x) \frac{d^s u}{dx^s} \right) - \lambda Bu = 0$$

при краевых условиях (3.212) сходятся к соответствующим точным собственным числам, если $p(x)$ и B удовлетворяют тем же условиям, что и в уравнении (3.211). То же верно для собственных чисел уравнения

$$-\sum_{j, k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - \lambda \left(\sum_{j=1}^m B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Cu \right) = 0$$

при краевых условиях (3.214) или (3.215).

4. Видоизменение метода в случае естественных краевых условий. Пусть по-прежнему $A = A_0 + B$, где A_0 и B удовлетворяют условиям п. 2. Предположим дополнительно, что $D(B) \supset H_{A_0}$, так что оператор B определен на всех элементах пространства H_{A_0} . В этом случае необязательно брать координатные элементы из области $D(A_0)$ определения оператора A_0 , достаточно, чтобы они принадлежали пространству H_{A_0} . В применении к задачам математической физики это означает прежде всего, что координатные элементы могут не удовлетворять естественным краевым условиям. Система уравнений для коэффициентов a_k , входящих в

формулу (3.207), теперь пишется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \{[\varphi_1, \varphi_1] + (B\varphi_1, \varphi_1)\} a_1 + \{[\varphi_2, \varphi_1] + (B\varphi_2, \varphi_1)\} a_2 + \dots \\ & \dots + \{[\varphi_n, \varphi_1] + (B\varphi_n, \varphi_1)\} a_n = (f, \varphi_1), \\ & \{[\varphi_1, \varphi_2] + (B\varphi_1, \varphi_2)\} a_1 + \{[\varphi_2, \varphi_2] + (B\varphi_2, \varphi_2)\} a_2 + \dots \\ & \dots + \{[\varphi_n, \varphi_2] + (B\varphi_n, \varphi_2)\} a_n = (f, \varphi_2), \\ & \dots \\ & \{[\varphi_1, \varphi_n] + (B\varphi_1, \varphi_n)\} a_1 + \{[\varphi_2, \varphi_n] + (B\varphi_2, \varphi_n)\} a_2 + \dots \\ & \dots + \{[\varphi_n, \varphi_n] + (B\varphi_n, \varphi_n)\} a_n = (f, \varphi_n). \end{aligned}$$

Точно так же для собственных чисел уравнения $A_0 u - \lambda B u = 0$ вместо (3.210) получается следующее уравнение:

$$\left. \begin{array}{cccc} [\varphi_1, \varphi_1] - \lambda (B\varphi_1, \varphi_1) & [\varphi_2, \varphi_1] - \lambda (B\varphi_2, \varphi_1) & \dots & [\varphi_n, \varphi_1] - \lambda (B\varphi_n, \varphi_1) \\ [\varphi_1, \varphi_2] - \lambda (B\varphi_1, \varphi_2) & [\varphi_2, \varphi_2] - \lambda (B\varphi_2, \varphi_2) & \dots & [\varphi_n, \varphi_2] - \lambda (B\varphi_n, \varphi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\varphi_1, \varphi_n] - \lambda (B\varphi_1, \varphi_n) & [\varphi_2, \varphi_n] - \lambda (B\varphi_2, \varphi_n) & \dots & [\varphi_n, \varphi_n] - \lambda (B\varphi_n, \varphi_n) \end{array} \right\} = 0;$$

квадратные скобки означают энергетическое произведение в H_{A_0} .

5. Обобщение метода Бубнова — Галёркина (проекторный метод). Пусть дано линейное уравнение

$$Au = f, \quad (3.216)$$

где $u \in E_1$, $f \in E_2$, E_1 и E_2 — некоторые банаховы пространства и A — оператор, действующий из E_1 в E_2 . Зададим последовательность подпространств L_n размерности n , где $n = 1, 2, \dots$, причем $L_n \subset D(A) \subset E_1$ при любом n . Зададим, далее, последовательность n -мерных подпространств $M_n \subset E_2$, и пусть P_n — оператор проектирования из пространства E_2 в подпространство M_n . Проекционный метод состоит в том, что точное уравнение (3.216) заменяется приближенным уравнением

$$P_n A u_n = P_n f, \quad u_n \in L_n. \quad (3.217)$$

Очевидно, проектор P_n имеет вид

$$P_n u = \sum_{k=1}^n l_k(u) \psi_k,$$

где $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ — базис подпространства M_n , а $l_k(u)$ — линейные ограниченные в E_2 функционалы. Если $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ есть базис для подпространства L_n , то u_n имеет вид (3.207)

сводится к следующей:

$$\sum_{k=1}^n a_k \int_{\Omega_j} A\varphi_k dx = \int_{\Omega_j} f dx \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (3.220)$$

Пример 40. Метод коллокации. Пусть A — дифференциальный оператор порядка s , $E_1 = C^{(s)}(\Omega)$, $E_2 = C(\Omega)$. Выберем последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, удовлетворяющих всем краевым условиям задачи; как обычно, потребуем, чтобы при любом n функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ были линейно независимы. Натянутое на $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ подпространство примем за L_n , тогда u_n имеет вид (3.207). В области Ω выберем теперь n точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и положим $l_j(u) = u(\xi_j)$. Система (3.218) в данном случае имеет вид

$$\sum_{k=1}^n a_k (A\varphi_k)_{x=\xi_j} = f(\xi_j) \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (3.221)$$

§ 10. Вариационные методы в некоторых нелинейных задачах

1. Общие теоремы. Приводимая ниже теорема 29 выделяет класс нелинейных уравнений, решение которых можно заменить решением некоторой вариационной задачи.

Теорема 29. Пусть P — нелинейный, вообще говоря, оператор, действующий в вещественном гильбертовом пространстве H и определенный на линейном множестве M , плотном в H , и пусть ищется решение уравнения

$$Pu = f, \quad f \in H. \quad (3.222)$$

Пусть оператор P удовлетворяет следующим условиям: 1) $P0 = 0$; 2) дифференциал Гато $P'(u)h$ существует для любых $u, h \in M$, линеен относительно h и, как элемент H , непрерывен при фиксированном h в любой плоскости двух измерений, содержащей точку u ; 3) при любом $u \in M$ оператор $P'(u)$ симметричен и положителен, так что при $u, h_1, h_2, h \in M$

$$\begin{aligned} (P'(u)h_1, h_2) &= (h_1, P'(u)h_2), \\ (P'(u)h, h) &> 0, \quad h \neq 0. \end{aligned}$$

Если при перечисленных условиях существует решение уравнения (3.222), то это решение единственно и реализует минимум функционала

$$\Phi(u) = \int_0^1 (Ptu, u) dt - (f, u). \quad (3.223)$$

Обратно, если существует элемент множества M , реализующий минимум функционала (3.223), то этот элемент удовлетворяет уравнению (3.222).

Теорема 29 устанавливает эквивалентность двух задач о разрешимости уравнения (3.222) и о минимизации функционала (3.223), но не утверждает существования решения ни той, ни другой задачи. Условия существования решения вариационной задачи и некоторые свойства решения вытекают из следующих теорем.

Теорема 30. Пусть выполнены условия 1)–3) теоремы 29, и пусть, кроме того, существует такая постоянная $\gamma > 0$, что

$$(P'(u)h, h) \geq \gamma^2 \|h\|^2, \quad u, h \in M. \quad (3.224)$$

Тогда: а) функционал (3.223) ограничен снизу; б) любая минимизирующая для этого функционала последовательность сходится в метрике пространства H к некоторому пределу.

Предел, существование (и единственность) которого вытекает из теоремы 30, называется обобщенным решением задачи о минимуме функционала (3.223).

Теорема 31. Пусть выполнены условия 1)–3) теоремы 29, и пусть существуют такие положительные постоянные β и γ , что для любых $u, h \in M$

$$(P'(u)h, h) \geq \beta^2 (P'(0)h, h) \geq \gamma^2 \|h\|^2. \quad (3.225)$$

Тогда обобщенное решение задачи о минимуме функционала (3.223) принадлежит пространству H_A , где $A = P'(0)$.

2. Метод Ритца. Для приближенного решения нелинейных вариационных задач, точнее говоря, для построения минимизирующей последовательности, обычно используется метод Ритца. Допустим, что ищется минимум некоторого функционала $\Phi(u)$, область определения которого линейна.

Выбираем координатную систему $\{\varphi_n\}$ ($n=1, 2, \dots$), подчинив ее обычным условиям: 1) все элементы координатной системы принадлежат области определения данного функционала; 2) координатные элементы, взятые в любом конечном числе, линейно независимы; 3) координатная система полна в некоторой метрике, определенной на области определения данного функционала. Расстояние между элементами u и v в этой метрике будем обозначать через $\rho(u, v)$; если в упомянутой метрике $D(\Phi)$ окажется банаховым пространством, то будем писать $\rho(u, v) = \|u - v\|_\rho$.

Множество $D(\Phi)$ линейно, поэтому при любых значениях постоянных a_1, a_2, \dots, a_n

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \in D(\Phi) \quad (3.226)$$

и выражение $\Phi(u_n)$ имеет смысл. Это выражение есть функция конечного числа переменных a_1, a_2, \dots, a_n . Найдем те их значения, при которых $\Phi(u_n)$ достигает минимума; для этого надо решить систему уравнений

$$\frac{\partial \Phi(u_n)}{\partial a_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3.227)$$

и проверить, что найденные значения постоянных a_k действительно реализуют минимум величины $\Phi(u_n)$. Подставив эти значения в выражение (3.226), получим элемент u_n , который назовем n -м приближенным по Ритцу решением данной вариационной задачи.

Функционал Φ называется возрастающим в данной метрике ρ , если

$$\lim_{\rho(u, v) \rightarrow \infty} \Phi(u) = +\infty. \quad (3.228)$$

Функционал $\Phi(u)$ называется полунепрерывным сверху в точке u и в метрике ρ , если по любому данному числу $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что $\Phi(u) - \Phi(v) > -\varepsilon$, если $\rho(u, v) < \delta$; этот функционал просто называется полунепрерывным сверху (в метрике ρ), если он полунепрерывен сверху в любой точке $u \in D(\Phi)$.

Теорема 32. Пусть функционал $\Phi(u)$ полунепрерывный сверху и возрастающий в некоторой метрике ρ ; допустим еще, что этот функционал непрерывно дифференцируем в любом конечномерном линейном пространстве из области своего

определения. Тогда: 1) функционал $\Phi(u)$ ограничен снизу; 2) приближенное по Ритцу решение можно построить при любом n ; 3) последовательность приближенных по Ритцу решений — минимизирующая для функционала $\Phi(u)$.

3. Нелинейная теория пологих оболочек. Задача о равновесии пологой оболочки под действием нормальной нагрузки $q(x, y)$ приводится к задаче о минимуме потенциальной энергии этой оболочки:

$$I = \iint_S \left\{ \frac{D}{2} (\Delta w)^2 + \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\mu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} (1-\mu) \varepsilon_{12}^2 \right] - qw \right\} dx dy. \quad (3.229)$$

Здесь приняты следующие обозначения: E — модуль упругости, μ — постоянная Пуассона, h — толщина оболочки, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — жесткость оболочки при изгибе, S — срединная поверхность оболочки,

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y},$$

u, v — тангенциальные смещения, w — нормальное смещение, k_1 и k_2 — начальные кривизны в сечениях, параллельных соответственно плоскостям zx и zy . Оболочка предполагается жестко закрепленной по краю.

Пользуясь уравнениями равновесия оболочки, можно выразить u и v через w , для чего достаточно решить некоторую линейную задачу; теперь можно считать, что функционал (3.229) зависит только от w . Об этом функционале доказывается, что: 1) он ограничен снизу; 2) приближенные по Ритцу решения можно строить при любом n ; 3) множество этих приближенных решений компактно в метрике

$$\|w\|^2 = \iint_S (\Delta w)^2 dx dy;$$

4) каждая предельная точка названного множества реализует некоторый относительный минимум функционала (3.229).

4. Функционалы теории пластичности и их обобщение.

Некоторые задачи теории пластичности можно свести к задаче о минимуме функционала вида

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^k \tau_i^2(u) \int_0^{\tau_i^2(u)} \varrho_i(\xi) d\xi \right\} dx - \int_{\Omega} fu dx, \quad f \in L_2(\Omega). \quad (3.230)$$

Здесь ϱ_i — неотрицательные функции от ξ , заданные в промежутке $0 \leq \xi < \infty$, Ω — конечная область в пространстве координат, $\tau_i^2(u)$ — неотрицательные квадратичные формы относительно функции u и ее производных до некоторого порядка; предполагается, что для функций, удовлетворяющих однородным краевым условиям данной задачи, по крайней мере при одном значении $i = j$ выполняются неравенства $\varrho_j(\xi) \geq \varrho_0 = \text{const} > 0$ и

$$\int_{\Omega} \tau_j^2(u) dx \geq \gamma^2 \int_{\Omega} u^2 dx, \quad \gamma = \text{const} > 0. \quad (3.231)$$

Приведем два примера.

Пример 41. Для задачи упруго-пластического кручения

$$\Phi(u) = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \int_0^{T^2} \bar{g}(\xi) d\xi - \omega u \right] dx dy, \quad (3.232)$$

где $T^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, Ω — область сечения стержня, ω — постоянная; функция $u(x, y)$ должна обращаться в нуль на границе области Ω , которая предполагается односвязной. Наконец, функция $\bar{g}(\xi)$ удовлетворяет неравенствам $\bar{g}'(\xi) > 0$, $\bar{g}(\xi) \geq \frac{1}{G}$, где G — модуль сдвига материала в упругом состоянии.

Пример 42. Ползучесть пластинки, закрепленной по краю. В этом случае

$$\Phi(w) = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \int_0^{H^2(w)} g(\xi) d\xi - p w \right] dx dy, \quad (3.233)$$

где w — нормальный прогиб, p — интенсивность нормальной нагрузки,

$$H^2 w = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2;$$

на границе области Ω функция w и ее нормальная производная обращаются в нуль. Наконец, $g(\xi)$ — некоторая функция, ограниченная сверху и снизу положительными числами.

При выполнении перечисленных выше условий доказывается, что функционал (3.230) достигает минимума и что процесс Ритца для этого функционала сходится.

5. Решение нелинейных систем Ритца. Метод Качанова.

Л. М. Качанов изложил свой метод применительно к одной задаче теории пластичности, С. Н. Розе распространил его на некоторые более общие функционалы¹⁾.

Пусть данный функционал имеет вид

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^k \tau_i^2(u) \int_0^{\tau_i^2(u)} \varrho_i(\xi) d\xi \right\} dx - (f, u), \quad (3.234)$$

где функции $\varrho_i(\xi)$ и формы $\tau_i^2(u)$ удовлетворяют условиям п. 4 и $f \in L_2(\Omega)$. Задачу о минимуме функционала (3.234) будем решать по методу Ритца, для чего выберем координатную систему $\{\varphi_k\}$, удовлетворяющую условиям п. 2, положим

$$u_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$$

и составим уравнения

$$\frac{\partial \Phi(u_n)}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.235)$$

Чтобы решить эту систему, поступим следующим образом. В интеграле (3.234) заменим $\varrho_i(\xi)$ некоторыми постоянными $\varrho_i^{(0)} \geq 0$, причем постоянная $\varrho_i^{(0)}$ должна быть положительной; полученный таким образом квадратичный функционал обозначим через $\Phi_1(u)$:

$$\Phi_1(u) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^k \varrho_i^{(0)} \tau_i^2(u) dx - (f, u).$$

¹⁾ См. литературные указания в конце главы.

Положим

$$u_{n1} = \sum_{k=1}^n a_{k1} \Phi_k$$

и подберем коэффициенты a_{k1} так, чтобы $\Phi_1(u_{n1})$ было минимальным; как легко видеть, для этого достаточно решить линейную относительно коэффициентов a_{k1} систему. Определив эти коэффициенты, заменим в функционале (3.234) $q_i(\xi)$ на $q_i(\tau_i^2(u_{n1}))$, что приведет к новому квадратичному функционалу:

$$\Phi_2(u) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^k q_i(\tau_i^2(u_{n1})) \tau_i^2(u) dx - (f, u).$$

Положим

$$u_{n2} = \sum_{k=1}^n a_{k2} \Phi_k$$

и подберем коэффициенты a_{k2} так, чтобы $\Phi_2(u_{n2})$ было минимальным. Этот процесс продолжаем. Если последовательность решений

$$(a_{1s}, a_{2s}, \dots, a_{ns}) \quad (s=1, 2, \dots)$$

стремится при $s \rightarrow \infty$ к некоторому пределу, то этот предел есть решение системы (3.235).

Пример 43 ([29], [82]). Функция напряжений $u(x, y)$ упруго-пластического кручения стержня квадратного сечения со стороны 2 реализует минимум функционала

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\int_0^T f(\lambda) \lambda d\lambda - 2\omega u \right] dx dy$$

на множестве функций, которые обращаются в нуль на контуре квадрата. Здесь ω — угол кручения на единицу длины,

$$T = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

— интенсивность касательных напряжений, связанная с интенсивностью деформаций сдвига Γ соотношением $\Gamma = f(T) T$.

Выполнив под знаком внутреннего интеграла подстановку $\lambda^2 = \xi$, мы приведем наш функционал к виду

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\int_0^{T^2} q(\xi) d\xi - 2\omega u \right] dx dy, \quad q(\xi) = \frac{1}{2} f(\sqrt{\xi}).$$

Вычисления проведены для случая, когда $\omega = 0,015$, а соотношение между T и Γ имеет вид

$$T = \begin{cases} 8 \cdot 10^5 \Gamma, & \Gamma \leq 0,0025, \\ 1940 + 24 \cdot 10^3 \Gamma, & \Gamma \geq 0,0025. \end{cases}$$

Отсюда легко найти, что

$$Q(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{16} \cdot 10^{-5}, & \xi \leq 4 \cdot 10^6, \\ \frac{1}{48} \cdot 10^{-3} \left(1 - \frac{1940}{\sqrt{\xi}} \right), & \xi \geq 4 \cdot 10^6. \end{cases}$$

Были использованы две координатные функции:

$$\varphi_1 = (x^2 - 1)(y^2 - 1), \quad \varphi_2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2),$$

так что

$$u_2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1)[a_1 + a_2(x^2 + y^2)].$$

По методу Л. М. Качанова проведены 32 итерации; счет проводился на ЭВМ «Урал». Первое приближение соответствует упругому состоянию и резко отличается от всех последующих приближений, которые сравнительно близки между собой; после 30 итераций первые 5 знаков стабилизируются (см. таблицу).

s	$a_{1s} \cdot 10^{-5}$	$a_{2s} \cdot 10^{-5}$	s	$a_{1s} \cdot 10^{-5}$	$a_{2s} \cdot 10^{-5}$
1	0,0701256598	0,0142167558	17	0,0174171448	-0,0036978272
2	0,0180226718	-0,0033820822	18	0,0174189902	-0,0036991472
3	0,0178718986	-0,0037645918	19	0,0174205806	-0,0037003790
4	0,0177279558	-0,0038018398	20	0,0174219636	-0,0037015066
5	0,0175541842	-0,0036417728	21	0,0174231448	-0,0037025316
6	0,0175513918	-0,0037422022	22	0,0174241668	-0,0037034506
7	0,0175429202	-0,0038871818	23	0,0174250498	-0,0037042658
8	0,0174617178	-0,0037578672	24	0,0174258064	-0,0037049904
9	0,0174521578	-0,0037292512	25	0,0174264580	-0,0037056288
10	0,0174036396	-0,0036996034	26	0,0174270162	-0,0037061862
11	0,0174005660	-0,0036923128	27	0,0174274962	-0,0037066732
12	0,0174035498	-0,0036916262	28	0,0174279068	-0,0037070980
13	0,0174068752	-0,0036924296	29	0,0174282610	-0,0037074664
14	0,0174099386	-0,0036936516	30	0,0174285608	-0,0037077868
15	0,0174126626	-0,0036950292	31	0,0174288402	-0,0037080636
16	0,0174150636	-0,0036964422	32	0,0174290410	-0,0037082982

6. Сведение к задаче Коши. Другой прием решения нелинейной системы Ритца основан на следующей идее (см.,

например, [19]). Пусть требуется решить систему уравнений

$$f_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.236)$$

Построим функции $F_i(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda)$ так, чтобы

$$F_i(a_1, a_2, \dots, a_n, 1) = f_i(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

и чтобы выражение $F_i(a_1, a_2, \dots, a_n, 0)$ было достаточно простым; для определенности пусть

$$F_i(a_1, a_2, \dots, a_n, 0) = a_i. \quad (3.237)$$

Уравнения

$$F_i(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.238)$$

определяют a_1, a_2, \dots, a_n как функции от λ ; для наших целей достаточно знать значения этих функций при $\lambda = 1$. Дифференцируя уравнения (3.238) по λ , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial a_k} \frac{da_k}{d\lambda} + \frac{\partial F_i}{\partial \lambda} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.239)$$

для которой соотношения (3.237) дают начальные условия

$$a_i|_{\lambda=0} = 0. \quad (3.240)$$

Если задача Коши (3.239), (3.240) имеет решение на промежутке $0 \leq \lambda \leq 1$, то, построив каким-нибудь приближенным методом это решение и положив в нем $\lambda = 1$, мы решим систему (3.236).

При некоторых условиях, о которых сказано ниже, такая задача Коши действительно имеет решение.

Рассмотрим функционал $\Phi(u)$, заданный на линейном, плотном в некотором вещественном гильбертовом пространстве H , и являющийся потенциалом некоторого оператора $P(u)$; это означает, что

$$\left. \frac{d}{dt} \Phi(u + th) \right|_{t=0} = (P(u), h)$$

для всех $u, h \in D(\Phi)$.

Будем предполагать, что дифференциал Гато $DP(u, h) = = P'(u)h$ оператора $P(u)$ есть равномерно положительно ограниченный снизу оператор. Это значит, что существует такая положительная постоянная γ , не зависящая ни от u ,

ни от h , что справедливо неравенство

$$(P'(u)h, h) \geq \gamma^2 \|h\|^2.$$

Поставим задачу о минимуме функционала $\Phi(u)$ и будем решать ее по методу Ритца, для чего зададимся последовательностью координатных элементов, удовлетворяющих обычным условиям, и будем искать приближенное решение в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k.$$

Метод Ритца приводит к следующей системе уравнений для коэффициентов a_k :

$$(P(u_n), \varphi_j) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (3.241)$$

Заметим, что к этой же системе приводит применение метода Бубнова—Галёркина к уравнению $P(u) = 0$, которое является уравнением Эйлера—Лагранжа для вариационной задачи о минимуме функционала $\Phi(u)$.

Применяя метод сведения к задаче Коши, возьмем систему (3.238) в виде

$$a_j + \lambda [(P(u_n), \varphi_j) - a_j] = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (3.242)$$

что приводит к следующей задаче Коши:

$$\frac{da_j}{d\lambda} + (P(u_n), \varphi_j) - a_j + \lambda \left\{ \sum_{k=1}^n [(P'(u_n) \varphi_k, \varphi_j) - \delta_{jk}] \frac{da_k}{d\lambda} \right\} = 0 \quad (3.243)$$

$$a_j|_{\lambda=0} = 0. \quad (3.244)$$

Определитель Δ_n матрицы коэффициентов при производных в системе (3.243) отличен от нуля при всех $\lambda \in [0, 1]$, и эту систему можно решить относительно производных $\frac{da_j}{d\lambda}$, которые по формулам Крамера могут быть представлены в виде

$$\frac{da_j}{d\lambda} = \frac{\Delta_n^{(j)}}{\Delta_n} = g_j(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda) \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (3.245)$$

Предполагаем следующее:

1) Функции коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_n , равные

$$(P(u_n), \varphi_i) \text{ и } (P'(u_n) \varphi_k, \varphi_j),$$

непрерывны при всех значениях аргументов и имеют полиномиальный порядок роста на бесконечности, так что

$$|(P(u_n), \varphi_j)| \leq p_m(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|), \quad (3.246)$$

$$|(P'(u_n) \varphi_k, \varphi_j)| \leq p_{m-1}(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|); \quad (3.247)$$

здесь p_m и p_{m-1} обозначают полиномы степеней m и $m-1$ соответственно; m — некоторое натуральное число.

2) Имеет место оценка

$$(P'(u_n) h, h) \geq N \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{m-1}{2}} \|h\|^2, \quad N = \text{const} > 0. \quad (3.248)$$

Тогда решение задачи Коши (3.243), (3.244) существует в промежутке $0 \leq \lambda \leq 1$.

Можно доказать, что для функционала (3.230) при некоторых дополнительных предположениях относительно функций $q_i(\xi)$ условия (3.246), (3.248) выполняются при $m=1$.

§ 11. Метод прямых

1. Основы метода. Метод прямых является промежуточным между аналитическими и сеточными методами. Сущность его состоит в том, что производные по одним независимым переменным заменяются их приближенными выражениями через конечные разности, тогда как производные по остальным переменным оставляются без изменения. Тем самым данное дифференциальное уравнение заменяется системой дифференциальных уравнений, но с меньшим числом независимых переменных.

Поясним сказанное на примере уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.

Пусть требуется найти интеграл уравнения

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y) u = G(x, y) \quad (3.249)$$

в некоторой области Ω . Для определенности допустим, что данное уравнение эллиптическое, а область Ω конечная. На границе S этой области должно быть задано некоторое краевое условие. Допустим, хотя это и необязательно, что каждая прямая, параллельная оси x , либо вовсе не пересекается с границей S , либо имеет с этой границей общий отрезок, либо пересекает ее не более чем в двух точках.

Проведем прямые, параллельные оси x , и пусть расстояние между соседними прямыми постоянно и равно h . Пусть при этом область Ω пересекает прямые

$$y = y_0 + kh = y_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (3.250)$$

В уравнении (3.249) положим $y = y_k$ и заменим производные по y разностными отношениями. Можно, например, положить

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=y_k} = \frac{1}{h} [u_{k+1}(x) - u_k(x)],$$

где $u_k(x) = u(x, y_k)$. Аналогично

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{y=y_k} &= \frac{1}{h} [u'_{k+1}(x) - u'_k(x)], \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=y_k} &= \frac{1}{h^2} [u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)]. \end{aligned}$$

Подставим это в уравнение (3.249), в котором уже положено $y = y_k$; мы получим систему n обыкновенных линейных уравнений с $n+2$ неизвестными функциями $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x), u_{n+1}(x)$.

Если область Ω имеет вид, изображенный на рис. 22 (см. стр. 311), то недостающие два уравнения можно получить из краевых условий на прямолинейных участках AB и CD границы. Краевые условия для неизвестных функций $u_k(x)$ естественным образом получаются из краевых условий для функции $u(x, y)$ на участках границы AC и BD .

Аналогично можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений линейное (а также и нелинейное) уравнение более высокого порядка или систему дифференциальных уравнений в частных производных; тип уравнения (или системы) при этом особой роли не играет. Нетрудно распространить метод прямых и на случай большего числа независимых переменных.

Применение метода прямых, скажем, к уравнению (3.249) целесообразно, если его коэффициенты постоянны или зависят только от y : в этом случае мы приходим к системе линейных обыкновенных уравнений с постоянными коэффициентами.

2. Метод прямых для уравнений Лапласа и Пуассона.

Для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

система метода прямых имеет вид

$$\frac{5}{6} u_k''(x) + \frac{1}{12} [u_{k+1}''(x) + u_{k-1}''(x)] + \\ + \frac{1}{h^2} [u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)] = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (3.251)$$

Аналогично для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

получаем систему

$$\frac{5}{6} u_k''(x) + \frac{1}{12} [u_{k+1}''(x) + u_{k-1}''(x)] + \\ + \frac{1}{h^2} [u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)] - F_k(x) = 0 \quad (3.252) \\ (k=1, 2, \dots, n),$$

$$\text{где} \quad F_k(x) = \frac{5}{6} f_k(x) + \frac{1}{12} [f_{k+1}(x) + f_{k-1}(x)].$$

Подробнее рассмотрим тот случай, когда область имеет вид, изображенный на рис. 22, а уравнению Пуассона сопутствует краевое условие $u|_S = 0$. В этом случае $u_0(x) = u_{n+1}(x) = 0$ и система (3.252) содержит n уравнений с n неизвестными функциями $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$.

Введем векторы

$$U = [u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)], \\ F = [F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)]$$

и матрицу

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (3.252) можно записать в виде

$$\left(E + \frac{1}{12}M\right)U'' + \frac{M}{h^2}U - F = 0, \quad (3.253)$$

где E — единичная матрица порядка n .

Нетрудно найти такую матрицу B , чтобы матрица $B^{-1}MB$ была диагональной. Именно, если обозначить элементы матрицы B через b_{ks} , то

$$b_{ks} = (-1)^{k+s} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{\pi ks}{n+1}.$$

Матрица B одновременно ортогональна и симметрична, так что $B = B^* = B^{-1}$. Теперь $BMB = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ и, следовательно,

$$M = B(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)B,$$

где, как легко подсчитать,

$$\lambda_k = -2 \left(1 + \cos \frac{k\pi}{n+1}\right).$$

Введя теперь обозначения:

$$\begin{aligned} BU &= V = (v_1, v_2, \dots, v_n), \\ BF &= G = (g_1, g_2, \dots, g_n), \\ \alpha_k^2 &= -\frac{\lambda_k}{h^2 \left(1 + \frac{\lambda_k}{12}\right)}, & \Phi_k(x) &= \frac{g_k(x)}{1 + \frac{\lambda_k}{12}}, \end{aligned}$$

мы сведем систему (3.252) к n независимым уравнениям

$$v_k''(x) - \alpha_k^2 v_k(x) = \Phi_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.254)$$

Интегрируя эти уравнения и возвращаясь затем к неизвестным $u_k(x)$, найдем, например, для задачи, симметричной относительно оси y ,

$$\begin{aligned} u_k(x) &= \sum_{s=1}^n (-1)^{k+s} C_s \sin \frac{\pi ks}{n+1} \operatorname{ch} \alpha_s x + \\ &+ \int_0^x \sum_{s=1}^n \frac{(-1)^{k+s} \sqrt{2} \sin \frac{k\pi s}{n+1}}{\sqrt{n+1} \alpha_s} \operatorname{sh} \alpha_s(x-t) \Phi_s(t) dt. \quad (3.255) \end{aligned}$$

Произвольные постоянные C_s определяются из алгебраической системы, которая получается из (3.255) после подстановки краевых условий.

Интегралы в формулах (3.255) определяют частное решение системы (3.252). Разумеется, в частных случаях частное решение можно строить и в более простой форме. Так, если в уравнении Пуассона $f(x, y) = -1$, то таким частным решением является совокупность постоянных

$$a_k = \frac{k(n+1-k)}{2} h^2.$$

3. Бигармоническое уравнение. Будем рассматривать бигармоническое уравнение на плоскости в предположении, что на границе области заданы сама искомая функция и ее нормальная производная; допустим, что область имеет вид, изображенный на рис. 22 (см. стр. 311). Уравнения метода прямых в этом случае имеют вид

$$\left(E + \frac{1}{6}M\right)U^{(4)} + \frac{2}{h^2}\left(M + \frac{1}{2}M^2\right)U'' + \frac{1}{h^4}M^2U = F; \quad (3.256)$$

символы в левой части уравнения (3.256) имеют те же значения, что и выше, а F означает вектор, определенным образом зависящий от данных на границе и от неизвестных еще значений $u_1(x)$ и $u_n(x)$. Систему (3.256) можно приближенно заменить распадающейся системой, в которой каждое уравнение содержит только одну неизвестную. Для этого в выражении вектора F положим

$$u_1(x) = g_{11}(x) + hg_{21}(x), \quad u_n(x) = g_{12}(x) + hg_{22}(x),$$

где g_{11} и g_{12} означают данные значения искомой бигармонической функции $u(x, y)$ на прямолинейных отрезках AB и CD (см. рис. 22), а g_{21} и g_{22} — значения нормальной производной искомой функции на тех же отрезках. Теперь вектор F становится известным. Полагая

$$BU = V = (v_1, v_2, \dots, v_n), \quad BF = G = (g_1, g_2, \dots, g_n),$$

получим n независимых уравнений

$$v_k^{(4)} + \beta_k v_k'' + \gamma_k v_k = \frac{g_k}{1 + \frac{1}{6}\lambda_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где введены обозначения

$$\beta_k = \frac{2}{h^2} \frac{\lambda_k + \frac{1}{12} \lambda_k^2}{1 + \frac{1}{6} \lambda_k}, \quad \gamma_k = \frac{1}{h^4} \frac{\lambda_k^2}{1 + \frac{1}{6} \lambda_k}.$$

4. Метод прямых для параболического уравнения. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Lu + f(x, y) = \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + f(x, y). \quad (3.257)$$

Пусть точка x меняется в конечной области Ω пространства координат x_1, x_2, \dots, x_m , а переменная t — в промежутке $0 \leq t < \infty$. Пусть на границе S области Ω задано краевое условие

$$u|_S = 0, \quad (3.258)$$

а при $t=0$ — начальное условие

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \quad (3.259)$$

Будем считать, что оператор L положительно определенный при краевом условии (3.258). Рассмотрим последовательность моментов времени $t_k = kh$ ($k=1, 2, \dots$) и положим $u(t_k, x) = u_k(x)$. Функция $u_0(x)$ известна в силу начального условия (3.259), а именно: $u_0(x) = \varphi(x)$. Для определения функций $u_k(x)$ при $k > 0$ заменим производную по времени разностным отношением по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_k} = \frac{u_k(x) - u_{k-1}(x)}{h}.$$

Это приводит нас к последовательности уравнений

$$Lu_k + \frac{1}{h} u_k(x) = f(x, t_k) + \frac{1}{h} u_{k-1}(x), \quad (3.260)$$

которые надлежит решать при краевом условии

$$u_k|_S = 0. \quad (3.261)$$

Оператор задачи (3.260), (3.261) положительно определенный, и эту задачу можно решить, например, энергетическим методом. Таким образом, зная функцию $u_0(x)$ и положив в

последних уравнениях $k = 1$, мы найдем функцию $u_1(x)$; теперь те же уравнения при $k = 2$ позволяют найти функцию $u_2(x)$ и т. д.

Относительно метода прямых для уравнений параболического типа сделаем следующие замечания:

- 1) Заменяя производную $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_k}$ по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_k} = \frac{u_{k+1}(x) - u_k(x)}{h},$$

мы могли бы на каждом шагу непосредственно определять функцию u_{k+1} по уже известной функции u_k , не решая при этом никакой краевой задачи, однако такой процесс был бы неустойчив.

- 2) Метод прямых применим и к общему уравнению вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + f, \tag{3.262}$$

где A — оператор, положительно определенный в некотором гильбертовом пространстве. В частности, можно рассматривать уравнения более высоких порядков с граничными условиями, обеспечивающими положительную определенность оператора задачи.

- 3) Если оператор A в уравнении (3.262) не положительно определен, а только ограничен снизу, то метод прямых можно применять, выбрав достаточно малое h , так, чтобы был положительно определенным оператор $A + \frac{1}{h} I$, где I — тождественный оператор.

НЕКОТОРЫЕ ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Основные результаты, относящиеся к теории и приложениям вариационных методов для линейных задач и полученные до 1956 г., изложены в книге [63]. На цитированную в этой книге литературу в настоящей главе, как правило, ссылок не делалось.

Ряд сведений о вариационных методах можно найти в следующих трудах: [25], [46], [70], [97], [119], [122], [131].

К пп. 4 и 5 § 1. Понятие обобщенных производных было введено С. Л. Соболевым; ему же принадлежат основные результаты, относящиеся к этому понятию и к теоремам вложения. См. книгу этого автора [97], а также книгу [95]. Теорема 6 вытекает из результатов Е. П. Калугиной; см. [20], [21].

К п. 3 § 3. Составление системы Ритца обычно связано с большим количеством аналитических выкладок. Проведению их на ЭВМ посвящена статья [96].

К пп. 7 и 8 § 3. Об изгибе пластин с острым краем и о спектрах соответствующих задач см. [55], [56].

К п. 2 § 5. Подробный вывод формулы (3.147) см. в [126].

К п. 4 § 5. О методе Трефца в его наиболее общей формулировке и о полученных здесь результатах см. [3].

К п. 6 § 5. Соображения Вайнштейна и Аронштейна подробно развиты в работах [119] и [131]. Относительно последующих соображений см. статьи [121], [127], [128], [132].

К § 7. Определение сильно минимальных систем см. в [100]. Вопросам, связанным с устойчивостью метода Ритца, посвящены работы [65], [68], [109].

К п. 1 § 8. Ряд интересных соображений о построении координатных систем содержится в книге [25].

К пп. 2—4 § 8. Подробнее о рациональном выборе координатных систем для конкретных классов задач см. [67].

К п. 5 § 9. Общее понятие о проекционном методе и ряд теорем о его сходимости даны в статье [80].

К § 10. Многие важные вопросы, касающиеся применения вариационных методов к нелинейным задачам, трактуются в следующих работах: [7], [12], [14], [15], [19], [27], [28], [39], [40], [66], [82], [123]. Этот перечень ни в коем случае не претендует на полноту.

К § 11. О методе прямых для уравнений Лапласа и Пуассона и для бигармонического уравнения подробнее см. [63]; там же приведена библиография. О применении метода к простейшему параболическому уравнению см. [94]; общий случай рассмотрен в [37]. В статье [36] метод прямых применен к более сложному уравнению вида

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B \frac{\partial u}{\partial t} + Cu = f.$$

Г Л А В А IV

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

§ 1. Приближенное вычисление характеристических чисел и собственных функций симметричного ядра

1. Общие замечания. В настоящем параграфе через $K(x, s)$ будет обозначаться симметричное ядро, так что $K(s, x) = \overline{K(x, s)}$. Принимается, что x и s суть вещественные переменные, пробегающие один и тот же промежуток (a, b) , который может быть и бесконечным; все последующее верно, впрочем, и тогда, когда x и s суть точки одной и той же области пространства любого числа измерений или, в более общем случае, одного и того же измеримого множества. Ядро считается таким, что интегральный оператор

$$K\varphi = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds \quad (4.1)$$

вполне непрерывен в пространстве $L_2(a, b)$; для этого достаточно например, чтобы двойной интеграл

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds \quad (4.2)$$

был конечным — в ряде случаев будем принимать это допущение. Другой важный класс ядер, делающий оператор (4.1) вполне непрерывным, это ядра со слабой особенностью (их называют также ядрами со слабой полярностью); они имеют вид

$$K(x, s) = \frac{A(x, s)}{|x-s|^\alpha}, \quad (4.3)$$

где постоянная α заключена в пределах $0 < \alpha < 1$, а функция $A(x, s)$ ограничена и в случае симметричного ядра сама симметрична. Если x и s не вещественные числа, а точки m -мерного многообразия, то показатель α может быть заключен в пределах $0 < \alpha < m$. Если ядро имеет слабую особенность, то промежуток (a, b) (в общем случае—область или многообразие, которое пробегают точки x и s) следует считать конечным—тогда оператор (4.1) будет вполне непрерывным в пространстве $L_2(a, b)$.

Характеристическим числом ядра $K(x, s)$ называется такое значение численного параметра λ , при котором однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda K\varphi = 0 \quad (4.4)$$

имеет нетривиальное (отличное от тождественного нуля) решение; это решение называется собственной функцией ядра, соответствующей характеристическому числу λ . Если оператор (4.1) вполне непрерывен, то каждому его характеристическому числу соответствует только конечное число линейно независимых собственных функций; множество характеристических чисел конечно или счетно, в последнем случае оно имеет единственную предельную точку на бесконечности.

Характеристическое число называется простым, если ему соответствует лишь одна линейно независимая функция, и кратным в противном случае. Число линейно независимых собственных функций, соответствующих данному характеристическому числу, называется его кратностью.

Характеристические числа данного ядра можно выписать в виде последовательности, расположенной в порядке возрастания модулей. Принято при этом повторять каждое характеристическое число столько раз, какова его кратность. При такой записи среди характеристических чисел могут встречаться равные, но каждому характеристическому числу соответствует только одна линейно независимая собственная функция.

Числа, обратные к характеристическим числам ядра, называются собственными числами этого ядра.

Характеристические числа симметричного ядра вещественны; соответствующие собственные функции можно считать ортогональными и нормированными (как мы будем говорить короче, ортонормированными).

С симметричным ядром $K(x, s)$ можно связать так называемую квадратичную форму этого ядра

$$(K\varphi, \varphi) = \int_a^b \int_a^b K(x, s) \overline{\varphi(x)} \varphi(s) dx ds; \quad (4.5)$$

ее значения вещественны.

Теорема 1. Собственные числа симметричного ядра совпадают со стационарными значениями его квадратичной формы, которые она принимает на множестве нормированных функций $\varphi(x)$; соответствующие собственные функции суть те функции, на которых эти стационарные значения достигаются.

На практике часто бывает удобно пользоваться следующими теоремами.

Теорема 2. Наибольшее по модулю собственное число σ_1 симметричного ядра $K(x, s)$ равно по абсолютной величине максимуму выражения $|(K\varphi, \varphi)|$ при условии $\|\varphi\|^2 = 1$; соответствующая собственная функция $\varphi_1(x)$ совпадает с функцией, на которой указанный максимум достигается.

Теорема 3. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ — первые n собственных чисел симметричного ядра $K(x, s)$, расположенные в порядке убывания их модулей, и пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ — соответствующие им ортонормированные собственные функции. Абсолютная величина ближайшего по модулю к данным числам $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ собственного числа σ_{n+1} равна максимуму выражения $|(K\varphi, \varphi)|$ при условиях

$$\|\varphi\|^2 = 1, \quad (\varphi, \varphi_1) = (\varphi, \varphi_2) = \dots = (\varphi, \varphi_n) = 0; \quad (4.6)$$

соответствующая собственная функция $\varphi_{n+1}(x)$ совпадает с функцией, которая удовлетворяет условиям (4.6) и на которой упомянутый максимум достигается.

Симметричное ядро называется положительно определенным, если его квадратичная форма принимает при $\varphi(x) \not\equiv 0$ только положительные значения; эти ядра представляют наибольший интерес, и ниже в этом параграфе мы главным образом такие ядра и будем иметь в виду. Для положительно определенных ядер теоремы 2 и 3 упрощаются и приводятся к следующим.

Теорема 2а. Наибольшее собственное число σ_1 положительно определенного ядра равно максимуму его квадратичной формы при условии $\|\varphi\|^2 = 1$; соответствующая собственная функция совпадает с функцией, на которой этот максимум достигается.

Теорема 3а. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ — первые n собственных чисел положительно определенного ядра $K(x, s)$, следующие в порядке убывания, и $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ — соответствующие им ортонормированные собственные функции. Ближайшее к данным собственное число σ_{n+1} равно максимуму квадратичной формы $(K\varphi, \varphi)$ при условиях (4.6); соответствующая собственная функция совпадает с функцией, которая удовлетворяет условиям (4.6) и на которой указанный максимум достигается.

2. Метод Ритца. Выберем последовательность функций $\{\psi_n(x)\}$, называемых координатными. Эти функции должны удовлетворять следующим трем условиям: 1) $\psi_n(x) \in L_2(a, b)$; 2) каково бы ни было число n , функции $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$ линейно независимы; 3) последовательность координатных функций полна в $L_2(a, b)$; это означает, что по данной функции $f(x) \in L_2(a, b)$ и данному числу $\varepsilon > 0$ можно подобрать натуральное число N и коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ так, чтобы

$$\|f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \psi_k\| < \varepsilon.$$

Заметим, что всем перечисленным условиям можно удовлетворить, взяв в качестве координатной любую полную в $L_2(a, b)$ ортонормированную систему.

По методу Ритца полагаем

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k; \quad (4.7)$$

коэффициенты α_k подчиняем условию $\|\varphi_n\|^2 = 1$, что дает

$$\sum_{j, k=1}^n (\psi_j, \psi_k) \alpha_j \bar{\alpha}_k = 1, \quad (4.8)$$

и ищем при этом условии стационарные значения квадра-

точной формы

$$(K\varphi_n, \varphi_n) = \sum_{j, k=1}^n (K\psi_j, \psi_k) a_j \bar{a}_k. \quad (4.9)$$

По методу Лагранжа это приводит к однородной линейной системе относительно коэффициентов a_k (σ —множитель Лагранжа):

$$\sum_{k=1}^n \{(K\psi_j, \psi_k) - \sigma(\psi_j, \psi_k)\} a_k = 0 \quad (4.10)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n),$$

определитель которой должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (K\psi_1, \psi_1) - \sigma(\psi_1, \psi_1) & (K\psi_1, \psi_2) - \sigma(\psi_1, \psi_2) & \dots & (K\psi_1, \psi_n) - \sigma(\psi_1, \psi_n) \\ (K\psi_2, \psi_1) - \sigma(\psi_2, \psi_1) & (K\psi_2, \psi_2) - \sigma(\psi_2, \psi_2) & \dots & (K\psi_2, \psi_n) - \sigma(\psi_2, \psi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (K\psi_n, \psi_1) - \sigma(\psi_n, \psi_1) & (K\psi_n, \psi_2) - \sigma(\psi_n, \psi_2) & \dots & (K\psi_n, \psi_n) - \sigma(\psi_n, \psi_n) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.11)$$

Корни уравнения (4.11) дают приближенные значения собственных чисел ядра $K(x, s)$. Наибольший из корней уравнения (4.11) дает приближенное значение наибольшего собственного числа с недостатком, поэтому наименьшее характеристическое число получается с избытком. При стремлении n к бесконечности первые k корней уравнения (4.11), где k —любое фиксированное натуральное число, стремятся к первым k собственным числам ядра $K(x, s)$.

Найдя σ из уравнения (4.11), можно подставить его в систему (4.10); ее нетривиальное решение, подставленное в выражение (4.7), приводит к приближенному выражению собственной функции, соответствующей найденному собственному числу.

Пример 1. Найдём по методу Ритца приближенное значение наименьшего характеристического числа положительно определенного симметричного ядра

$$K(x, s) = \begin{cases} s, & x \geq s, \\ x, & x \leq s; \end{cases} \quad (4.12)$$

конец промежутка интегрирования $a=0$, $b=1$.

За координатные функции возьмем полиномы $\psi_n(x) = P_n(2x-1)$ ($n=0, 1, 2, \dots$), где P_n есть n -й полином Лежандра. Полиномы $\psi_n(x)$ ортогональны в промежутке $(0, 1)$, так что $(\psi_j, \psi_k) = 0$, $j \neq k$; легко

видеть также, что $(\psi_k, \psi_k) = \frac{1}{2k+1}$. В формуле (4.7) ограничимся двумя слагаемыми, так что

$$\varphi_n(x) = \varphi_2(x) = a_1 P_0(2x-1) + a_2 P_1(2x-1) = a_1 + a_2(2x-1).$$

Имеем:

$$(P_0, P_0) = 1, \quad (P_0, P_1) = 0, \quad (P_1, P_1) = \frac{1}{3}.$$

Для вычисления значений (KP_m, P_n) заметим, что

$$(KP_m, P_n) = \int_0^1 dx \left\{ \int_0^x s P_m(s) P_n(x) ds + \int_x^1 x P_m(s) P_n(x) ds \right\};$$

применив ко второму из двойных интегралов справа преобразование Дирихле, получим

$$(KP_m, P_n) = \int_0^1 dx \int_0^x s [P_m(s) P_n(x) + P_m(x) P_n(s)] ds.$$

Отсюда найдем:

$$(KP_0, P_0) = \frac{1}{3}, \quad (KP_0, P_1) = (KP_1, P_0) = \frac{1}{12}, \quad (KP_1, P_1) = \frac{1}{30}.$$

Уравнение (4.11) принимает вид

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \sigma & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{30} - \frac{1}{3} \sigma \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\sigma^2 - \frac{13}{30} \sigma + \frac{1}{80} = 0.$$

Отсюда

$$\sigma_1 = \frac{1}{60} (13 + \sqrt{124}), \quad \sigma_2 = \frac{1}{60} (13 - \sqrt{124}).$$

Это дает приближенные значения первых двух характеристических чисел ядра (4.12):

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sigma_1} \approx 2,4859,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sigma_2} \approx 32,226.$$

Точные значения характеристических чисел ядра (4.12) суть

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4} \quad (n=1, 2, \dots);$$

это легко установить, если заметить, что интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s) \varphi(s) ds = 0,$$

где $K(x, s)$ —ядро (4.12), равносильно дифференциальному уравнению $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$ и краевым условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(1) = 0$. Точные значения первых двух характеристических чисел суть

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} = 2,4674, \quad \lambda_2 = \frac{9\pi^2}{4} = 22,2066.$$

Таким образом, используя в методе Ритца две координатные функции, мы получили сравнительно точное значение λ_1 и грубо неточное значение λ_2 . Последнее не случайно: чтобы получить достаточно точное значение k -го характеристического числа, надо использовать больше (и даже существенно больше) чем k координатных функций.

3. Метод моментов [11]. Метод моментов является одной из реализаций метода Ритца. Пусть $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ —первые n координатных функций, R_n —натянутое на них подпространство и P_n —оператор проектирования из $L_2(a, b)$ в R_n . Применение метода Ритца (формулы (4.7)—(4.11)) равносильно отысканию характеристических чисел не оператора K , а конечномерного оператора $P_n K P_n$. Метод моментов состоит в том, что за координатные берутся функции $\psi_m = K^{m-1} \omega$ ($m=1, 2, \dots$), где функция $\omega(x)$ выбирается произвольно; предполагается только, что при выбранном n функции $\omega, K\omega, \dots, K^{n-1}\omega$ линейно независимы. Вычисления по методу моментов производятся так: собственные числа оператора $P_n K P_n$ получаются как корни уравнения

$$\sigma^n + \alpha_{n-1} \sigma^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0, \quad (4.13)$$

коэффициенты которого в свою очередь находятся из системы

$$\sum_{k=1}^n (\psi_j, \psi_k) \alpha_{k-1} + (\psi_j, \psi_{n+1}) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (4.14)$$

Метод моментов применим и к несимметричным ядрам.

Пример 2. Найдем приближенные значения характеристических чисел ядра

$$K(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-s)x, & x \leq s, \\ \frac{1}{2}(2-x)s, & x \geq s. \end{cases}$$

Положим $\omega(x) = \sin \pi x$ и $n = 3$. Имеем:

$$\psi_1(x) = \omega = \sin \pi x,$$

$$\psi_2(x) = \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{\pi^2} \sin \pi x,$$

$$\psi_3(x) = \frac{x}{6\pi} \left(1 + \frac{3}{\pi^2}\right) - \frac{x^3}{12\pi} + \frac{1}{\pi^4} \sin \pi x,$$

$$\psi_4(x) = \left(\frac{31}{720\pi} + \frac{1}{6\pi^3} + \frac{1}{2\pi^5}\right)x - \frac{x^3}{36\pi} \left(1 + \frac{3}{\pi^2}\right) + \frac{x^5}{240\pi} + \frac{1}{\pi^6} \sin \pi x.$$

Для постоянных α_k получаем систему

$$0,5000000\alpha_0 + 0,1013212\alpha_1 + 10^{-2} \cdot 2,384240\alpha_2 + 10^{-3} \cdot 5,761453 = 0,$$

$$0,1013212\alpha_0 + 10^{-2} \cdot 2,384240\alpha_1 + 10^{-3} \cdot 5,761453\alpha_2 + 10^{-3} \cdot 1,398529 = 0,$$

$$10^{-2} \cdot 2,384240\alpha_0 + 10^{-3} \cdot 5,761453\alpha_1 + 10^{-3} \cdot 1,398529\alpha_2 + 10^{-4} \cdot 3,397373 = 0,$$

которая дает:

$$\alpha_0 = -10^{-4} \cdot 1,249, \quad \alpha_1 = 10^{-2} \cdot 1,35979, \quad \alpha_2 = -0,296814.$$

Уравнение (4.13) имеет вид

$$\sigma^3 - 0,296814\sigma^2 + 10^{-2} \cdot 1,35979\sigma - 10^{-4} \cdot 1,249 = 0,$$

его корни:

$$\sigma_1 = 0,242963, \quad \sigma_2 = 10^{-2} \cdot 4,145, \quad \sigma_3 = 10^{-2} \cdot 1,2,$$

откуда

$$\lambda_1 = 4,11585, \quad \lambda_2 = 24,20, \quad \lambda_3 = 80.$$

Значения характеристических чисел, верные с точностью до выписанных знаков, суть

$$\lambda_1 = 4,11585, \quad \lambda_2 = 24,14, \quad \lambda_3 = 63,61.$$

4. Метод Келлога. Пусть $K(x, s)$ — симметричное ядро, которое для простоты будем считать положительно определенным, и $\omega(x)$ — произвольная функция класса $L_2(a, b)$. По методу Келлога строятся последовательность функций $\omega_n(x) = K^n \omega$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и последовательность чисел

$$\frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|}. \quad (4.15)$$

Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ суть ортонормированные собственные функции ядра $K(x, s)$, а $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ — соответствующие характеристические числа. Пусть функция $\omega(x)$ ортогональна к собственным функциям $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{k-1}(x)$, но не ортогональна к собственной функции $\varphi_k(x)$. Тогда последовательность (4.15) имеет пределом k -е характеристическое число λ_k , а последовательность функций

$$\frac{\omega_n(x)}{\|\omega_n\|}$$

имеет пределом некоторую линейную комбинацию собственных функций, принадлежащих характеристическому числу λ_k . В частности, если функция $\omega(x)$ не ортогональна к собственной функции $\varphi_1(x)$, то предел последовательности (4.15) равен λ_1 .

К тому же пределу, что и последовательность (4.15), стремится последовательность

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\|\omega_n\|}}.$$

В предположении, что $(\omega, \varphi_1) \neq 0$, получаем две приближенные формулы для наименьшего характеристического числа:

$$\lambda_1 \approx \frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|}, \quad (4.16)$$

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[n]{\|\omega_n\|}}, \quad (4.17)$$

и приближенную формулу для первой собственной функции:

$$\varphi_1(x) \approx \frac{\omega_n(x)}{\|\omega_n\|}. \quad (4.18)$$

Формула (4.16) дает значение λ_1 с избытком. Заметим еще, что формулой (4.17) можно пользоваться при достаточно больших n .

Если данное ядро симметричное, но не положительно определенное, то формулы (4.16) и (4.17) дают приближенные значения наименьшей абсолютной величины характеристических чисел данного ядра.

Пример 3. Вычислим по методу Келлога наименьшее характеристическое число ядра (4.12). Возьмем $\omega(x) = x$ и $n = 3$. Заметим,

что

$$Kx^n = \int_0^1 K(x, s) s^n ds = \frac{1}{n+1} \left(x - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right);$$

отсюда легко получается

$$\omega_1(x) = K\omega = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3,$$

$$\omega_2(x) = K\omega_1 = \frac{5}{24}x - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{120}x^5,$$

$$\omega_3(x) = K\omega_2 = \frac{61}{720}x - \frac{5}{144}x^3 + \frac{1}{240}x^5 - \frac{1}{5040}x^7.$$

Отсюда

$$\|\omega_1\| = 0,23238, \quad \|\omega_2\| = 0,09396, \quad \|\omega_3\| = 0,03792.$$

Полагая в формуле (4.16) последовательно $n=2$ и $n=3$, получим два приближенных значения λ_1 с избытком:

$$\lambda_1 \approx 2,475, \quad \lambda_1 \approx 2,477.$$

5. Метод следов. m -м следом ядра $K(x, s)$ называется число

$$A_m = \int_a^b K_m(s, s) ds,$$

где $K_m(x, s)$ означает m -е итерированное ядро. Если ядро симметрично и удовлетворяет условию (4.2), то его следы, начиная со второго, конечны. Следы ядра связаны с его характеристическими числами соотношением

$$A_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m};$$

отсюда вытекают приближенные формулы для наименьшего характеристического числа, пригодные, если число m достаточно велико:

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}, \quad (4.19)$$

$$|\lambda_1| \approx \frac{\sqrt[2m]{r}}{\sqrt{A_{2m}}}. \quad (4.20)$$

В формуле (4.20) r есть кратность характеристического числа λ_1 . Если наряду с λ_1 число $-\lambda_1$ также является характеристическим для данного ядра, то под r следует понимать сумму кратностей характеристических чисел λ_1 и $-\lambda_1$.

Формула (4.19) дает значение $|\lambda_1|$ с избытком, формула (4.20)—с недостатком.

Можно получить приближенные формулы того же типа и для следующих характеристических чисел, но формулы эти оказываются довольно громоздкими. Так, если характеристические числа λ_1 и λ_2 простые, причем числа $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$ не суть характеристические числа данного ядра (это будет, например, если данное ядро положительно определенное), то верны приближенные формулы

$$|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|} \sqrt{\frac{B_{2m}}{B_{2m+2}}}, \quad (4.21)$$

$$|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|} \sqrt[2m]{\frac{2}{B_{2m}}}, \quad (4.22)$$

где

$$B_{2m} = A_{2m}^2 - A_{4m}; \quad (4.23)$$

формула (4.21) дает значение $|\lambda_2|$ с избытком, формула (4.22)—с недостатком.

При аналогичных предположениях имеем

$$|\lambda_3| \approx \frac{1}{|\lambda_1^2 \lambda_2|} \sqrt[2m]{\frac{8}{B_{2m}^2 - 2B_{4m}}}. \quad (4.24)$$

Заметим еще, что следы четного порядка для симметричного ядра можно вычислять по формуле

$$A_{2m} = \int_a^b \int_a^b |K_m(x, s)|^2 dx ds = 2 \int_a^b \int_a^x |K_m(x, s)|^2 ds dx, \quad (4.25)$$

требующей вдвое меньшего числа итераций.

Пример 4. Найдем по методу следов первое характеристическое число ядра (4.12). Легко найти, что

$$K_2(x, s) = xs - \frac{x^2s}{2} - \frac{s^3}{3}, \quad s \leq x,$$

и по формуле (4.25)

$$A_2 = \frac{1}{6}, \quad A_4 = \frac{131}{5040}.$$

Характеристические числа ядра (4.12) все положительны, поэтому, полагая в формуле (4.19) $m=1$, получим

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{\bar{A}_2}{A_4}} = 2,532.$$

Далее, характеристические числа ядра (4.12) также и простые, поэтому в формуле (4.20) надо принять $r=1$; полагая в этой формуле $m=2$, получим

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[4]{A_4}} = 2,460.$$

Рассмотрим еще один пример.

Пример 5. Квадраты корней функции Бесселя $J_0(x)$ суть характеристические числа симметричного ядра

$$L(x, s) = \begin{cases} -\sqrt{xs} \ln s, & x \leq s, \\ -\sqrt{xs} \ln x, & x \geq s, \quad a=0, \quad b=1. \end{cases}$$

Найдем по методу следов первые два корня функции $J_0(x)$. Для второго итерированного ядра легко находим

$$L_2(x, s) = \frac{\sqrt{xs}}{4} [(x^2 + s^2) \ln x + 1 - x^2], \quad x \geq s.$$

Теперь по формуле (4.25)

$$A_2 = \frac{1}{32}, \quad A_4 = \frac{11}{12288}, \quad B_2 = \frac{1}{12288}.$$

Полагая

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[4]{A_4}}, \quad \lambda_2 \approx \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{2}{B_2}},$$

получим:

$$\lambda_1 \approx 5,7813, \quad \lambda_2 \approx 27,117.$$

Отсюда для первых двух корней функции $J_0(x)$ получаем приближенные значения с недостатком:

$$\alpha_1 \approx 2,4044, \quad \alpha_2 \approx 5,2702;$$

более точные значения этих корней суть

$$\alpha_1 = 2,4048, \quad \alpha_2 = 5,5200.$$

6. Замена ядра вырожденным. Если ядро вырожденное:

$$K(x, s) = \sum_{\alpha=1}^n u_{\alpha}(x) v_{\alpha}(s),$$

то его собственные числа совпадают с собственными числами матрицы $\|A_{\alpha\beta}\|_{\alpha, \beta=1}^{\alpha, \beta=n}$, где

$$A_{\alpha\beta} = \int_a^b v_\alpha(x) u_\beta(x) dx.$$

Определение этих собственных чисел есть задача алгебраическая, решаемая хорошо известными методами. Поэтому, если каким-нибудь способом (см. ниже, § 4) аппроксимировать данное ядро вырожденным, то отыскание собственных чисел данного ядра приближенно сводится к алгебраической задаче об отыскании собственных чисел соответствующей матрицы.

7. Применение определителя Фредгольма. Характеристические числа ядра $K(x, s)$ (необязательно симметричного) можно найти как корни его определителя Фредгольма

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n}{n!} \lambda^n. \quad (4.26)$$

Коэффициенты c_n можно вычислять, пользуясь следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= 1, & B_0(x, s) &= K(x, s) \\ c_{n+1} &= \int_a^b B_n(x, x) dx, \\ B_n(x, s) &= c_n K(x, s) - n \int_a^b K(x, t) B_{n-1}(t, s) dt. \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Вычислив по формулам (4.27) несколько первых коэффициентов c_n , заменяем затем ряд (4.26) его отрезком, который представляет собой полином относительно λ ; корни этого полинома и дают приближенные значения характеристических чисел данного ядра. Способ этот на практике мало употребляется.

§ 2. Метод итераций

1. Простая итерация. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda K\varphi = f(x), \quad (4.28)$$

где

$$K\varphi = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds;$$

ядро $K(x, s)$ здесь и всюду ниже не предполагается обязательно симметричным. По методу простой итерации, называемому также методом последовательных приближений, с помощью рекуррентной формулы

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_n(s) ds = f(x) + \lambda K \varphi_n \quad (4.29)$$

строится последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$, которые рассматриваются как приближения к искомому решению уравнения (4.28); начальное приближение $\varphi_0(x)$ может быть выбрано произвольно.

Если в качестве начального приближения выбрать свободный член уравнения, так что $\varphi_0(x) = f(x)$, то

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=0}^n \lambda^m K^m f.$$

2. Условия сходимости. Будем считать, что

$$\left. \begin{aligned} B^2 = \int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds < \infty, \\ \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty; \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

эти требования не необходимы, но в случае их выполнения условия сходимости метода простой итерации формулируются проще.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (4.30). Последовательность (4.29) сходится в метрике $L_2(a, b)$ к решению уравнения (4.28), если $|\lambda| < |\lambda_1|$, где λ_1 есть наименьшее по модулю характеристическое число ядра $K(x, s)$. Если ядро удовлетворяет еще дополнительному условию

$$\int_a^b |K(x, s)|^2 ds \leq A = \text{const}, \quad (4.31)$$

то последовательность (4.29) сходится к решению уравнения (4.28) равномерно в замкнутом промежутке $[a, b]$.

Справедлива теорема, в некотором смысле обратная теореме 4: если при некотором λ процесс простой итерации

сходится, каков бы ни был свободный член уравнения, то $|\lambda| < |\lambda_1|$.

Условие $|\lambda| < |\lambda_1|$ не всегда легко проверяемо, и мы укажем некоторые более простые достаточные условия сходимости простой итерации.

Процесс простой итерации сходится в метрике $L_2(a, b)$, если

$$|\lambda| < B^{-1}. \quad (4.32)$$

Если ядро удовлетворяет условию (4.31), то сходимость равномерна в $[a, b]$.

Если промежуток (a, b) конечен, а ядро ограничено:

$$|K(x, s)| \leq M = \text{const},$$

то процесс простой итерации сходится равномерно при условии

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}. \quad (4.33)$$

При этом необязательно, чтобы свободный член $f(x)$ удовлетворял условию (4.30); достаточно, чтобы был конечным интеграл

$$\int_a^b |f(x)| dx.$$

Для ядра со слабой особенностью

$$K(x, s) = \frac{A(x, s)}{|x-s|^\alpha}, \quad |A(x, s)| \leq M = \text{const}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

процесс простой итерации сходится, если

$$|\lambda| < \frac{1-\alpha}{2^\alpha M(b-a)^{1-\alpha}}.$$

Если промежуток (a, b) конечен, а ядро вольтерровское, то процесс простой итерации сходится при любом значении λ . Если, кроме того, ядро ограничено, то процесс сходится равномерно, если только свободный член суммируем, т. е. существует упомянутый выше интеграл

$$\int_a^b |f(x)| dx.$$

Формула (4.29) содержит зависящую от параметра x квадратуру

$$K\varphi_n = \int_a^b K(x, s) \varphi_n(s) ds;$$

для ее вычисления можно использовать известные квадратурные формулы. Пусть квадратурная формула имеет вид

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i F(x_i).$$

Тогда значения функции $K\varphi_n$ в точках x_i можно вычислить по формуле

$$(K\varphi_n)_{x_i} = \sum_{j=1}^m A_j K(x_i, x_j) \varphi_n(x_j);$$

удобное расположение вычислений приведено в монографии Л. В. Канторовича и В. И. Крылова ([25], гл. III, стр. 127).

3. Видоизменения метода итераций. Такие видоизменения могут быть указаны, например, для положительно определенного симметричного ядра [23].

а) Метод наискорейшего спуска [23]. Рассмотрим интегральное уравнение

$$A\varphi = \varphi(x) + \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (4.34)$$

с симметричным положительно определенным ядром $K(x, s)$. Уравнение (4.34) можно заменить равносильной вариационной задачей о минимуме функционала

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= (\varphi, \varphi) + (K\varphi, \varphi) - (f, \varphi) - (\varphi, f) = \\ &= \int_a^b |\varphi(x)|^2 dx + \int_a^b \int_a^b K(x, s) \overline{\varphi(x)} \varphi(s) dx ds - \\ &\quad - 2\operatorname{Re} \int_a^b \varphi(x) \overline{f(x)} dx. \end{aligned}$$

По методу наискорейшего спуска выбираем произвольное нулевое приближение $\varphi_0(x)$. Далее подбираем такой элемент φ' с фиксированной нормой, чтобы

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} F(\varphi_0 + \varepsilon\varphi') \right|_{\varepsilon=0} = \max.$$

Построив элемент φ' , выбираем число ε так, чтобы

$$F(\varphi_0 + \varepsilon\varphi') = \min.$$

Элемент $\varphi_1 = \varphi_0 + \varepsilon\varphi'$ принимаем за первое приближение и повторяем процесс. Вычисления ведутся до того момента, когда два соседних приближения практически совпадают. Элемент φ' и число ε определяются по формулам

$$\varphi' = A\varphi_0 - f, \quad \varepsilon = \frac{\|\varphi'\|^2}{(A\varphi', \varphi')}.$$

Процесс сходится со скоростью прогрессии с знаменателем

$$\left(\frac{\sigma_1}{2 + \sigma_1} \right)^2,$$

где σ_1 — наибольшее собственное число ядра $K(x, s)$.

б) Применение простой итерации к преобразованному уравнению [74]. Пусть в уравнении (4.34) ядро по-прежнему симметричное и положительно определенное. Перепишем уравнение (4.34) в виде

$$\varphi = \varphi - \frac{\sigma_1}{(1 + \sigma_1)(2 + \sigma_1)} A\varphi + \frac{\sigma_1}{(1 + \sigma_1)(2 + \sigma_1)} f, \quad (4.35)$$

где σ_1 — наибольшее собственное число ядра $K(x, s)$, и применим к уравнению (4.35) метод простой итерации. Это приводит к рекуррентному соотношению

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \frac{\sigma_1}{(1 + \sigma_1)(2 + \sigma_1)} A\varphi_n + \frac{\sigma_1}{(1 + \sigma_1)(2 + \sigma_1)} f.$$

Процесс сходится, как прогрессия с знаменателем

$$q = \max \left(\frac{2}{2 + \sigma_1}, \frac{2 + 2\sigma_1 + \sigma_1^2}{2 + 3\sigma_1 + \sigma_1^2} \right);$$

так как ядро $K(x, s)$ по предположению положительно определенное, то $\sigma_1 > 0$ и $q < 1$.

4. Интегральное уравнение первого рода с симметричным ядром [105]. Пусть $K(x, s)$ — симметричное положительно определенное ядро, и пусть уравнение

$$K\varphi = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (4.36)$$

разрешимо. Выберем произвольную функцию $\varphi_0(x) \in L_2(a, b)$ и число λ из промежутка $0 < \lambda < 2\lambda_1$, где λ_1 — наименьшее характеристическое число ядра $K(x, s)$. Последовательность функций, определяемых рекуррентным соотношением

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) + \lambda [f(x) - K\varphi_n],$$

сходится в метрике $L_2(a, b)$ к решению уравнения (4.36).

§ 3. Применение квадратурных формул

1. Уравнения Вольтерра второго рода. Пусть в уравнении Вольтерра

$$\varphi(x) - \int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (4.37)$$

x меняется в конечном промежутке $[a, b]$, свободный член непрерывен в этом промежутке, а ядро непрерывно в треугольнике $a \leq x \leq b, a \leq s \leq x$. Интеграл в уравнении (4.37) заменим по какой-нибудь квадратурной формуле, не содержащей значения подынтегральной функции в правом конце промежутка интегрирования. Если квадратурная формула имеет вид

$$\int_a^{x_n} F(x) dx = \sum_{m=0}^{n-1} A_m^{(n)}(x_m),$$

то, полагая в уравнении (4.37) $x = x_n$, мы заменим это уравнение следующим:

$$\varphi(x_n) - \sum_{m=0}^{n-1} A_m^{(n)} K(x_n, x_m) \varphi(x_m) = f(x_n). \quad (4.38)$$

Уравнение (4.38) есть рекуррентное соотношение, позволяющее определить значения $\varphi(x_n)$, начиная с $\varphi(a) = f(a)$.

Может случиться, что ядро $K(x, s)$ не непрерывно; тогда целесообразно предварительно так преобразовать уравнение (4.37), чтобы подынтегральная функция стала непрерывной, и тогда уже применять квадратурную формулу. Пусть, например, ядро имеет слабую особенность при $x = s$, так что уравнение имеет вид

$$\varphi(x) - \int_a^x \frac{A(x, s)}{(x-s)^\alpha} \varphi(s) ds = f(x). \quad (4.39)$$

В этом случае целесообразно перейти к итерированному ядру, взяв число итераций настолько большим, чтобы новое ядро оказалось непрерывным.

2. Уравнения Вольтерра первого рода. Уравнение

$$\int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds = f(x), \quad f(a) = 0, \quad (4.40)$$

сводится к уравнению второго рода, если ядро $K(x, s)$ и свободный член $f(x)$ непрерывно дифференцируемы и $K(x, x) \neq 0$. Применение квадратурных формул позволяет избежать такого сведения. Пусть квадратурная формула содержит значение подынтегральной функции в конце промежутка интегрирования, так что

$$\int_a^{x_n} F(x) dx = \sum_{m=0}^n A_m^{(n)} F(x_m), \quad A_n^{(n)} \neq 0.$$

Уравнение (4.40) заменяется системой

$$\sum_{m=0}^n A_m^{(n)} K(x_n, x_m) \varphi(x_m) = f(x_n),$$

из которой рекуррентно определяются значения $\varphi(x_m)$ во всех узлах квадратурной формулы, кроме $x_0 = a$; для этого значения имеем

$$\varphi(a) = \frac{f'(a)}{K(a, a)}.$$

3. Уравнения Фредгольма. В уравнении

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (4.41)$$

заменяем интеграл по какой-нибудь квадратурной формуле. Пусть эта формула имеет вид

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{m=1}^n A_m F(x_m).$$

Уравнение (4.41) приближенно заменяется следующим:

$$\varphi(x) - \sum_{m=1}^n A_m K(x, x_m) \varphi(x_m) = f(x). \quad (4.42)$$

Положив здесь $x = x_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), получим алгебраическую систему для неизвестных значений $\varphi(x_j)$:

$$\varphi(x_j) - \sum_{m=1}^n A_m K(x_j, x_m) \varphi(x_m) = f(x_j) \quad (4.43)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n).$$

Решив ее и подставив полученные значения в формулу (4.42), получим приближенное решение данного интегрального уравнения. Можно также восстановить неизвестную функцию $\varphi(x)$, не прибегая к формуле (4.42), а воспользовавшись какой-нибудь интерполяционной формулой.

Можно рекомендовать как наиболее точные квадратурные формулы Гаусса и Чебышёва; если ядро и свободный член периодичны с периодом $b - a$, то можно воспользоваться формулой «прямоугольников», которая в этом случае также дает достаточно высокую точность.

Пример 6. Решение плоской внутренней задачи Дирихле для области, лежащей внутри достаточно гладкого замкнутого контура L , можно свести к решению интегрального уравнения

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\cos(\nu, r)}{r} \mu(\tau) d\sigma = f(t). \quad (4.44)$$

Здесь t и τ — значения параметра, определяющего положение точки на кривой L ; r — расстояние между точками, отвечающими этим значениям параметра; ν — внешняя нормаль к L в точке τ ; $d\sigma$ — эле-

мент длины дуги; $\mu(t)$ — искомая и $f(t)$ — данная функции. Интегральное уравнение (4.44) получается, если гармоническую функцию искать в виде потенциала двойного слоя с плотностью $\mu(\tau)$.

Решим приближенно уравнение (4.44) в случае, когда L есть эллипс

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t;$$

для определенности вычислений положим $a = 5$, $b = 3$. Зададимся также определенным видом функции $f(t)$; пусть

$$f(t) = x^2 + y^2 = 25 - 16 \sin^2 t.$$

Интеграл в уравнении (4.44) легко приводится к виду

$$\int_L \frac{\cos(\nu, r)}{r} \mu(\tau) d\sigma = -\frac{b}{2a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mu(\tau) d\tau}{1 - e^2 \cos^2 \frac{t+\tau}{2}},$$

где e — эксцентриситет эллипса; при выбранных выше значениях a , b и $f(t)$ уравнение (4.44) принимает вид

$$\mu(t) + \frac{3}{10\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mu(\tau) d\tau}{1 - 0,64 \cos^2 \frac{t+\tau}{2}} = 25 - 16 \sin^2 t; \quad (4.45)$$

точное решение этого уравнения известно и равно

$$\mu(t) = \frac{17}{2} + \frac{128}{17} \cos 2t = 8,50 + 7,53 \cos 2t.$$

Коэффициент перед интегралом в уравнении (4.45) $\frac{3}{10\pi} = 0,0958$; для упрощения вычислений округлим его до 0,1 и будем, следовательно, решать уравнение

$$\mu(t) + \int_{-\pi}^{\pi} \mu(\tau) \frac{d\tau}{6,8 - 3,2 \cos(t+\tau)} = 25 - 16 \sin^2 t. \quad (4.46)$$

Нетрудно видеть, что

$$\mu(-t) = \mu(\pi - t) = \mu(t). \quad (4.47)$$

Интеграл в (4.46) заменим по формуле прямоугольников, взяв число ординат $n = 12$. Обозначим

$$\mu(0) = y_1, \quad \mu\left(\frac{\pi}{6}\right) = y_2, \quad \mu\left(\frac{\pi}{3}\right) = y_3, \quad \mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_4.$$

Система (4.43) в данном случае приводится к следующей:

$$\begin{aligned} 1,19y_1 + 0,35y_2 + 0,31y_3 + 0,15y_4 &= 25, \\ 0,18y_1 + 1,34y_2 + 0,32y_3 + 0,16y_4 &= 21, \\ 0,16y_1 + 0,32y_2 + 1,34y_3 + 0,18y_4 &= 13, \\ 0,15y_1 + 0,31y_2 + 0,35y_3 + 1,19y_4 &= 9. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{1701}{106} \approx 16,038, & y_2 &= \frac{1301}{106} \approx 12,274, \\ y_3 &= \frac{501}{106} \approx 4,726, & y_4 &= \frac{101}{106} \approx 0,953. \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

Функцию $\mu(t)$ восстановим с помощью ее ряда Фурье, который, в силу соотношений (4.47), имеет вид

$$\mu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 2nt.$$

Величины (4.48) позволяют приближенно вычислить коэффициенты первых четырех членов этого ряда:

$$a_0 = \frac{901}{106} = 8,500, \quad a_1 = \frac{400}{53} \approx 7,547, \quad a_2 = a_3 = 0.$$

Отбросив остальные члены ряда Фурье, получим

$$\mu(t) = 8,50 + 7,55 \cos 2t,$$

что мало отличается от точного значения.

§ 4. Замена ядра вырожденным

Пусть уравнение

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (4.49)$$

разрешимо при любом свободном члене $f \in L_2(a, b)$. Пусть ядро $K(x, s)$ разбито на сумму

$$K(x, s) = L(x, s) + R(x, s), \quad (4.50)$$

причем ядро $R(x, s)$ имеет малую норму в метрике $L_2(a, b; a, b)$:

$$\int_a^b \int_a^b |R(x, s)|^2 dx ds < \varepsilon^2, \quad (4.51)$$

где ε — достаточно малое число. Тогда решение уравнения

$$\psi(x) - \int_a^b L(x, s) \psi(s) ds = f(x) \quad (4.52)$$

существует при любом свободном члене $f \in L_2(a, b)$ и $\|\varphi - \psi\| = O(\varepsilon)$. Если разбиение (4.50) выполнить так, чтобы ядро $L(x, s)$ было вырожденным, то уравнение (4.52) сводится к линейной алгебраической системе. Если ядро $K(x, s)$ удовлетворяет неравенству (4.31), а разбиение выполнено так, что $R(x, s)$ удовлетворяет не только неравенству (4.51), но еще и неравенству

$$\int_a^b |R(x, s)|^2 ds < c\varepsilon^2, \quad c = \text{const}, \quad (4.53)$$

то верна не только приведенная выше оценка в среднем, но и равномерная оценка $|\varphi(x) - \psi(x)| = O(\varepsilon)$, которую, если угодно, можно представить в виде $\|\varphi - \psi\|_C = O(\varepsilon)$.

Оценку величины $\|\varphi - \psi\|$ можно уточнить. Обозначим через $\Gamma_K(x, s)$ и $\Gamma_L(x, s)$ резольвенты ядер $K(x, s)$ и $L(x, s)$, через $\|R\|$, $\|\Gamma_K\|$, $\|\Gamma_L\|$ — нормы операторов с соответствующими ядрами. Тогда

$$\|\varphi - \psi\| \leq \|R\| (1 + \|\Gamma_K\|) (1 + \|\Gamma_L\|) \|f\|. \quad (4.54)$$

Норма в формуле (4.54) может быть взята в любом функциональном пространстве. Если эта норма взята в пространстве $L_2(a, b)$, то в силу неравенства (4.51) $\|R\| < \varepsilon$ и, следовательно,

$$\|\varphi - \psi\| < \varepsilon (1 + \|\Gamma_K\|) (1 + \|\Gamma_L\|) \|f\|. \quad (4.54')$$

Разбиение (4.50) можно выполнить многими способами, притом так, что ядро $L(x, s)$ будет вырожденным. Укажем некоторые из этих способов.

1°. Пусть последовательность $u_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2, \dots$) ортонормирована и полна в $L_2(a, b)$. Тогда ядро $K(x, s)$ разлагается в двойной ряд Фурье, сходящийся в среднем:

$$K(x, s) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} A_{\alpha\beta} u_\alpha(x) u_\beta(s),$$

где

$$A_{\alpha\beta} = \int_a^b \int_a^b K(x, s) \overline{u_\alpha(x)} u_\beta(s) dx ds;$$

взяв достаточно большое n , можно положить

$$L(x, s) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n A_{\alpha\beta} u_\alpha(x) \overline{u_\beta(s)}.$$

2°. Можно также построить разложение

$$K(x, s) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} B_{\alpha\beta} u_\alpha(x) \overline{u_\beta(s)},$$

где

$$B_{\alpha\beta} = \int_a^b \int_a^b K(x, s) \overline{u_\alpha(x)} u_\beta(s) dx ds,$$

и положить

$$L(x, s) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n B_{\alpha\beta} u_\alpha(x) \overline{u_\beta(s)}.$$

3°. Пусть последовательность функций $u_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2, \dots$) полна, но не ортонормирована в $L_2(a, b)$. Тогда последовательность функций $u_\alpha(x) \overline{u_\beta(s)}$ полна, но не ортонормирована в $L_2(a, b; a, b)$. Можно положить

$$L(x, s) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n A_{\alpha\beta} u_\alpha(x) \overline{u_\beta(s)},$$

выбрав коэффициенты $A_{\alpha\beta}$ так, чтобы

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s) - L(x, s)|^2 dx ds = \min; \quad (4.55)$$

для этого достаточно определить упомянутые коэффициенты из системы

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta=1}^n A_{\alpha\beta} \int_a^b u_\alpha(x) \overline{u_{\alpha'}(x)} dx \int_a^b \overline{u_\beta(s)} u_{\beta'}(s) ds = \\ = \int_a^b \int_a^b K(x, s) \overline{u_{\alpha'}(x)} u_{\beta'}(s) dx ds \quad (\alpha', \beta' = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Можно также положить

$$L(x, s) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n B_{\alpha\beta} u_{\alpha}(x) u_{\beta}(s)$$

и определить коэффициенты $B_{\alpha\beta}$ из системы

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta=1}^n B_{\alpha\beta} \int_a^b u_{\alpha}(x) \overline{u_{\alpha'}(x)} dx \int_a^b u_{\beta}(s) \overline{u_{\beta'}(s)} ds = \\ = \int_a^b \int_a^b K(x, s) \overline{u_{\alpha'}(x)} \overline{u_{\beta'}(s)} dx ds \quad (\alpha', \beta' = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

4°. Оба способа п. 3° являются частными случаями следующего более общего способа. Пусть две последовательности $\{u_{\alpha}(x)\}$ и $\{v_{\alpha}(x)\}$, $1 \leq \alpha < \infty$, полны, но, вообще говоря, не ортонормированы в $L_2(a, b)$. Можно положить

$$L(x, s) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n A_{\alpha\beta} u_{\alpha}(x) v_{\beta}(s),$$

выбрав коэффициенты $A_{\alpha\beta}$ так, чтобы выполнялось требование (4.55); для коэффициентов $A_{\alpha\beta}$ получается система

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta=1}^n A_{\alpha\beta} \int_a^b u_{\alpha}(x) \overline{u_{\alpha'}(x)} dx \int_a^b v_{\beta}(s) \overline{v_{\beta'}(s)} ds = \\ = \int_a^b \int_a^b K(x, s) \overline{u_{\alpha'}(x)} \overline{v_{\beta'}(s)} dx ds. \end{aligned}$$

5°. Если промежуток (a, b) конечный и ядро непрерывно в квадрате $a \leq x, s \leq b$, то ядро можно равномерно аппроксимировать полиномом от x и s и принять этот полином за $L(x, s)$.

6°. Метод Бубнова—Галёркина и метод наименьших квадратов, о которых будет сказано в следующем параграфе, представляют собой применительно к интегральным уравнениям некоторые специальные способы замены данного ядра на вырожденное.

Пример 7. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \int_0^1 \sin xs \varphi(s) ds = f(x). \quad (4.56)$$

Положим

$$L(x, s) = xs - \frac{x^3 s^3}{6},$$

тогда

$$R(x, s) = \sin xs - xs + \frac{x^3 s^3}{6} = \frac{x^5 s^5}{120} - \dots$$

Приближенное уравнение

$$\psi(x) - x \int_0^1 s \psi(s) ds + \frac{x^3}{6} \int_0^1 s^3 \psi(s) ds = f(x)$$

даёт

$$\psi(x) = f(x) + c_1 x + c_2 x^3, \quad (4.57)$$

где

$$c_1 = \int_0^1 s \psi(s) ds, \quad c_2 = -\frac{1}{6} \int_0^1 s^3 \psi(s) ds.$$

Умножая равенство (4.57) на x , соответственно на $-\frac{x^3}{6}$ и интегрируя, получаем:

$$\frac{2}{3} c_1 - \frac{1}{5} c_2 = f_1, \quad \frac{1}{30} c_1 + \frac{43}{42} c_2 = f_2,$$

где

$$f_1 = \int_0^1 x f(x) dx, \quad f_2 = -\frac{1}{6} \int_0^1 x^3 f(x) dx;$$

решив эту систему, найдем приближенное решение $\psi(x)$.

Оценим разность $\varphi - \psi$ по формуле (4.54). Примем сперва, что норма берется в метрике пространства C функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$. Тогда, например,

$$\|R\| = \text{Max}_x \int_0^1 |R(x, s)| ds;$$

аналогично определяются нормы и других интегральных операторов.

Имеем $|R(x, s)| < \frac{x^5 s^5}{120}$; отсюда

$$\|R\| \leq \text{Max}_x \int_0^1 \frac{x^5 s^5}{120} ds = \frac{1}{720}.$$

Далее,

$$\| \Gamma_K \| \leq \frac{\| K \|}{1 - \| K \|}.$$

Но

$$\begin{aligned} \| K \| &= \text{Max}_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 \sin xs \, ds = \text{Max}_{0 \leq x \leq 1} \frac{1 - \cos x}{x} = \\ &= 1 - \cos 1 < 1 - \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\| \Gamma_K \| < 1.$$

Точно так же

$$\| L \| = \text{Max}_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 \left(xs - \frac{x^3 s^3}{6} \right) ds = \text{Max}_{0 \leq x \leq 1} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{11}{24}$$

и

$$\| \Gamma_L \| < \frac{11}{13}.$$

Теперь по формуле (4.54)

$$\begin{aligned} \varphi - \psi \| &< \frac{1}{720} \cdot 2 \cdot \frac{24}{13} \| f \| = \frac{1}{195} \| f \| = 0,00513 \| f \| = \\ &= 0,00513 \text{ Max}_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|. \end{aligned}$$

Оценим теперь разность $\varphi - \psi$ в метрике $L_2(0, 1)$. Как известно, в пространстве $L_2(a, b)$ норма интегрального оператора с ядром $K(x, s)$ не превосходит величины B , определяемой формулой (4.2). Отсюда, так как

$$|R(x, s)| < \frac{x^5 s^5}{120},$$

то

$$\| R \| \leq \frac{1}{120} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 x^{10} s^{10} \, dx \, ds \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1320}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \| K \| &\leq \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \sin^2 xs \, dx \, ds \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \int_0^1 \int_0^1 x^2 s^2 \, dx \, ds \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \\ \| L \| &\leq \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left(xs - \frac{x^3 s^3}{6} \right)^2 \, dx \, ds \right\}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{75} + \frac{1}{1764} \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|\Gamma_K\| \leq \frac{1}{2}, \quad \|\Gamma_L\| < \frac{1}{2}$$

и

$$\|\varphi - \psi\| < \frac{1}{1320} \cdot \frac{9}{4} \|f\| = 0,00170 \|f\|.$$

§ 5. Методы Бубнова — Галёркина и наименьших квадратов

1. Метод Бубнова — Галёркина. Чтобы решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (4.58)$$

по методу Бубнова — Галёркина, выбирают полную в $L_2(a, b)$ последовательность функций $u_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2, \dots$) такую, что при любом n функций $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ линейно независимы, и ищут приближенное решение в виде

$$\varphi_n(x) = \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha u_\alpha(x); \quad (4.59)$$

коэффициенты a_α определяют из условия, чтобы невязка уравнения (4.58) была ортогональна к функциям $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$; это дает линейную систему

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha \int_a^b \left[u_\alpha(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) u_\alpha(s) ds \right] \overline{u_\beta(x)} dx = \\ = \int_a^b f(x) \overline{u_\beta(x)} dx \quad (\beta = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Если значение λ не характеристическое, то при достаточно больших n система (4.60) разрешима единственным образом; при $n \rightarrow \infty$ приближенное решение (4.59) стремится в метрике $L_2(a, b)$ к точному решению $\varphi(x)$ уравнения (4.58). Имеет место оценка

$$\|\varphi - \varphi_n\| \leq (1 + \varepsilon_n) \|\varphi - P_n \varphi\|, \quad (4.61)$$

где P_n — оператор проектирования в подпространство, натянутое на функции u_1, u_2, \dots, u_n , а $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Иногда применяется следующее обобщение метода Бубнова—Галёркина. Вводятся две полные в $L_2(a, b)$ системы $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$ такие, что при любом n как функции u_1, u_2, \dots, u_n , так и функции v_1, v_2, \dots, v_n линейно независимы; решение ищется в форме (4.59), но коэффициенты a_α определяются из условия ортогональности невязки к функциям v_1, v_2, \dots, v_n . Это приводит к системе для определения коэффициентов a_α :

$$\sum_{\alpha=1}^n a_\alpha \int_a^b \left[u_\alpha(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) u_\alpha(s) ds \right] \overline{v_\beta(x)} dx = \int_a^b f(x) \overline{v_\beta(x)} dx \quad (\beta = 1, 2, \dots, n). \quad (4.62)$$

Сформулируем условие сходимости обобщенного метода Бубнова—Галёркина. Допустим прежде всего, что последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ суть базисы в $L_2(a, b)$. Обозначим через U_n и V_n подпространства, натянутые на u_1, u_2, \dots, u_n и v_1, v_2, \dots, v_n соответственно, и пусть P_n —оператор проектирования в подпространство U_n . Допустим, далее, что существует такая постоянная $C > 0$, что для любого элемента $v \in V_n$ справедливо неравенство $\|v\| \leq C \|P_n v\|$. Тогда: 1) при достаточно больших n система (4.62) разрешима единственным образом; 2) $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в метрике $L_2(a, b)$; 3) верна оценка (4.61).

2. Метод наименьших квадратов. Выберем последовательность координатных функций $\{u_\alpha(x)\}$, удовлетворяющую тем же условиям, что и в п. 1, зададим приближенное решение в виде (4.59) и будем определять коэффициенты a_α из условия, чтобы невязка уравнения (4.58) имела минимальную в $L_2(a, b)$ норму:

$$\|\varphi_n - \lambda K \varphi_n\|^2 = \int_a^b \left| \varphi_n(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_n(s) ds \right|^2 dx = \min.$$

Это приводит к линейной алгебраической системе

$$\sum_{\alpha=1}^n a_\alpha (A u_\alpha, A u_\beta) = (f, A u_\beta) \quad (\beta = 1, 2, \dots, n), \quad (4.63)$$

в которой положено

$$Au = u(x) - \lambda Ku = u(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) u(s) ds.$$

Более подробно коэффициенты и свободные члены системы (4.63) можно записать так:

$$\begin{aligned} (Au_\alpha, Au_\beta) &= \int_a^b u_\alpha(x) \overline{u_\beta(x)} dx - \\ &- 2 \operatorname{Re} \left\{ \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, s) u_\alpha(s) \overline{u_\beta(x)} dx ds \right\} + \\ &+ |\lambda|^2 \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(x, s) \overline{K(x, t)} u_\alpha(s) u_\beta(t) dx ds dt, \\ (f, Au_\beta) &= \int_a^b f(x) \overline{u_\beta(x)} dx - \overline{\lambda} \int_a^b \int_a^b K(x, s) f(x) \overline{u_\beta(s)} dx ds. \end{aligned}$$

Если данное значение λ не является характеристическим для ядра $K(x, s)$, то система (4.63) разрешима при любом n и $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в метрике $L_2(a, b)$, где φ — решение уравнения (4.58); если приближенное решение φ_n построено, то его погрешность можно оценить по формуле

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq M \|\varphi_n - \lambda K \varphi_n - f\|;$$

здесь M — постоянная, равная норме оператора A^{-1} .

Может случиться, что λ есть характеристическое число ядра $K(x, s)$; тогда однородное уравнение

$$Au = u(x) - \lambda \int_\Omega K(x, y) u(y) dy = 0 \quad (4.64)$$

имеет нетривиальные решения, среди которых, как известно, только конечное число линейно независимых; эти последние обозначим через $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, ..., $\omega_p(x)$. Столько же линейно независимых решений имеет и сопряженное однородное уравнение $A^*u = 0$. Для разрешимости уравнения (4.58) необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была ортогональна ко всем решениям уравнения $A^*u = 0$. Примем, что это требование выполнено, тогда уравнение (4.58) имеет

бесчисленное множество решений. Среди них есть одно и только одно решение, ортогональное ко всем функциям $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_p(x)$. Если эти функции известны, то упомянутое решение можно построить по методу наименьших квадратов. Для этого выберем координатные функции $u_k(x)$, как указано выше, возьмем $n > p$ и положим

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k u_k(x).$$

Потребуем, чтобы

$$(\varphi_n, \omega_j) = \sum_{k=1}^n a_k (u_k, \omega_j) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, p).$$

С помощью этих соотношений выразим p коэффициентов a_k через остальные и затем потребуем, чтобы $\|Au_n - f\|^2 = \min$. Это приведет нас к линейной алгебраической системе, из которой мы и найдем оставшиеся $n-p$ коэффициентов a_k .

§ 6. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений

1. Постановка задачи. Будем рассматривать уравнение

$$A\varphi = a(t)\varphi(t) - b(t)S\varphi + \int_{\Gamma} K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad (4.65)$$

где

$$S\varphi = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Для простоты примем, что данные функции в уравнении (4.65) удовлетворяют условию Липшица с положительным показателем по тем переменным, от которых эти функции зависят. Примем также, что контур интегрирования Γ представляет собой простую замкнутую кривую, обладающую непрерывной кривизной; кривая Γ делит плоскость комплексной переменной на две области: внутреннюю D^+ и внешнюю D^- .

Коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ подчиним условию

$$\min_{t \in \Gamma} |a^2(t) - b^2(t)| > 0, \quad (4.66)$$

играющему основную роль в теории сингулярных интегральных уравнений,

В перечисленных условиях любое решение (если оно существует) уравнения (4.65), суммируемое со степенью, большей единицы, удовлетворяет условию Липшица с положительным показателем.

Через $\alpha(A)$ обозначим число линейно независимых решений однородного уравнения $A\varphi=0$; соответственно $\alpha(A^*)$ будет обозначать число таких же решений сопряженного однородного уравнения $A^*\psi=0$. Числа $\alpha(A)$ и $\alpha(A^*)$ конечны. Разность $m=\alpha(A)-\alpha(A^*)$, называемая *индексом* оператора A или уравнения (4.65), не зависит от ядра $K(t, \tau)$; она вычисляется по формуле

$$m = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d \arg \frac{a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)}. \quad (4.67)$$

Уравнение (4.65) разрешимо тогда и только тогда, когда его свободный член $f(t)$ ортогонален ко всем решениям уравнения $A^*\psi=0$. Если это условие выполнено и если, кроме того, решения однородного уравнения $A\varphi=0$ известны, то уравнение (4.65) можно приближенно решить по методу наименьших квадратов точно так же, как это делается в случае уравнения Фредгольма (см. конец предшествующего параграфа)¹⁾. Другой метод приближенного решения уравнения (4.65) может быть основан на том, что если $K(t, \tau) \equiv 0$, то это уравнение решается в замкнутой форме в квадратурах; если же $K(t, \tau)$ есть вырожденное ядро, то к вычислению квадратур добавляется нахождение решения некоторой линейной алгебраической системы. Способы приближенной замены фредгольмова ядра вырожденным изложены в § 4; здесь мы ограничимся поэтому только тем, что покажем, как решается уравнение (4.65) в случае, когда ядро $K(t, \tau)$ вырожденное.

2. Решение сингулярного уравнения с вырожденным ядром. Пусть

$$K(t, \tau) = \sum_{\alpha=1}^n u_{\alpha}(t) v_{\alpha}(\tau).$$

¹⁾ Подробно об этом см. статью автора «Метод наименьших квадратов в задачах математической физики», Уч. зап. ЛГУ, № 111, сер. матем. наук, вып. 16 (1949), 167—206. Специально о сингулярных уравнениях см. в этой статье стр. 174—176.

Уравнение (4.65) принимает вид

$$a(t)\varphi(t) - b(t)S\varphi = f(t) - \sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha}u_{\alpha}(t), \quad (4.68)$$

где

$$c_{\alpha} = \int_{\Gamma} v_{\alpha}(\tau)\varphi(\tau) d\tau. \quad (4.69)$$

Рассматривая правую часть уравнения (4.68) как известную, применим к этому уравнению метод Карлемана. Вкратце напомним этот метод. Правую часть уравнения (4.68) обозначим через $f_1(t)$ и положим $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z} d\tau$, где z — любая не лежащая на контуре Γ точка комплексной плоскости. Поместим начало координат внутри Γ , тогда

$$\ln \frac{a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)} = \theta(t) + m \ln t,$$

где функция $\theta(t)$ однозначна на Γ ; эта функция удовлетворяет условию Липшица с положительным показателем. Уравнение (4.68) приводится к виду

$$\Phi^+(t) - t^m e^{\theta(t)} \Phi^-(t) = \frac{f_1(t)}{a(t)-b(t)}, \quad (4.70)$$

где $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ суть пределы функции $\Phi(z)$, когда $z \rightarrow t$, $t \in \Gamma$, изнутри, соответственно, извне Γ . Положим

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\theta(\tau)}{\tau-z} d\tau$$

и введем новую неизвестную функцию $F(z)$, полагая $\Phi(z) = F(z)e^{\psi(z)}$. Обозначим через $\omega(t)$ сингулярный интеграл

$$\omega(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\theta(\tau)}{\tau-t} d\tau = \frac{1}{2} S\theta.$$

Тогда уравнение (4.70) принимает следующий вид:

$$F^+(t) - F^-(t) t^m = \frac{f_1(t) e^{-\omega(t)} t^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{a^2(t) - b^2(t)}}. \quad (4.71)$$

Дальнейшее зависит от значения индекса m .

Если $m=0$, то уравнение (4.68) имеет единственное решение, которое можно представить в виде

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) - \sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha} \varphi_{\alpha}(t), \quad (4.72)$$

где

$$\varphi_0(t) = \frac{a(t)f(t)}{a^2(t) - b^2(t)} + \frac{b(t)e^{w(t)}}{\sqrt{a^2(t) - b^2(t)}} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-w(\tau)} f(\tau) d\tau}{\sqrt{a^2(\tau) - b^2(\tau)} (\tau - t)}, \quad (4.73)$$

а $\varphi_{\alpha}(t)$ определяется по той же формуле (4.73), если заменить в ней $f(t)$ на $u_{\alpha}(t)$.

Из формулы (4.72) и (4.69) получаем систему для неизвестных c_{α} :

$$c_{\beta} + \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha\beta} c_{\alpha} = b_{\beta} \quad (\beta = 1, 2, \dots, n). \quad (4.74)$$

Здесь

$$a_{\alpha\beta} = \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha}(t) v_{\beta}(t) dt, \quad b_{\beta} = \int_{\Gamma} f(t) v_{\beta}(t) dt. \quad (4.75)$$

Если определитель системы (4.74) отличен от нуля, то уравнение (4.65) разрешимо и имеет единственное решение; если же этот определитель равен нулю, то уравнение (4.65) разрешимо тогда и только тогда, когда столбец свободных членов системы (4.74) удовлетворяет соответствующим условиям ортогональности; это равносильно тому, что некоторым условиям ортогональности удовлетворяет свободный член уравнения (4.65). В этом случае решение уравнения (4.65), если оно существует, не единственно.

Если $m > 0$, то решение уравнения (4.68) имеет вид

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) - \sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha} \varphi_{\alpha}(t) + \sum_{\gamma=1}^n g_{\gamma} \Phi_{\gamma}(t). \quad (4.76)$$

Здесь g_{γ} — произвольные постоянные, а $\Phi_{\gamma}(t)$ суть решения однородного уравнения

$$a(t) \Phi_{\gamma}(t) - b(t) S \Phi_{\gamma}(t) = 0;$$

функция $\varphi_0(t)$ на этот раз определяется формулой

$$\varphi_0(t) = \frac{a(t)}{a^2(t) - b^2(t)} f(t) + \frac{b(t) e^{\omega(t)}}{\sqrt{t^m [a^2(t) - b^2(t)]}} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tau^{\frac{m}{2}} e^{-\omega(\tau)} f(\tau)}{\sqrt{a^2(\tau) - b^2(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - t}, \quad (4.77)$$

а $\varphi_\alpha(t)$ получаются, если в формуле (4.77) заменить $f(t)$ на $u_\alpha(t)$. Для постоянных c_α и g_γ получается система

$$c_\beta + \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha\beta} c_\alpha - \sum_{\gamma=1}^m A_{\gamma\beta} g_\gamma = b_\beta \quad (\beta = 1, 2, \dots, n), \quad (4.78)$$

где $a_{\alpha\beta}$ и b_β имеют прежние значения (4.75), а

$$A_{\gamma\beta} = \int_{\Gamma} \Phi_\gamma(t) v_\beta(t) dt.$$

Если ранг матрицы коэффициентов при неизвестных в системе (4.78) равен n , то уравнение (4.68) всегда разрешимо, а соответствующее однородное уравнение имеет m линейно независимых решений. Если же ранг этой матрицы $r < n$, то уравнение (4.68) разрешимо тогда и только тогда, когда $f(t)$ удовлетворяет некоторым $n - r$ условиям ортогональности; число линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения равно $m + n - r$.

Пусть теперь $m < 0$, $m = -\mu$. Если решение уравнения (4.65) существует, то оно необходимо имеет вид

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) - \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha \varphi_\alpha(t),$$

где $\varphi_0(t)$ по-прежнему определяется формулой (4.77), а $\varphi_\alpha(t)$ получается по той же формуле (4.77) заменой $f(t)$ на $u_\alpha(t)$. Функция

$$f(t) - \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha u_\alpha(t)$$

необходимо должна удовлетворять следующим условиям ортогональности:

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{-\omega(\tau)} \tau^{\frac{\mu}{2}-k}}{\sqrt{a^2(\tau)-b^2(\tau)}} \left[f(\tau) - \sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha} u_{\alpha}(\tau) \right] d\tau = 0 \quad (4.79)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, \mu - 1).$$

Коэффициенты c_{α} должны удовлетворять еще условиям (4.74). Решение уравнения (4.65) существует, если система уравнений (4.74) и (4.79) совместна, и не существует в противном случае; решение единственно, если ранг матрицы системы (4.74) и (4.79) $r = \mu$, и не единственно, если $r < \mu$; в этом случае однородное уравнение (4.65) имеет $\mu - r$ линейно независимых решений.

НЕКОТОРЫЕ ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Вопросы приближенного решения интегральных уравнений подробно трактуются в книгах [30], [64], а также [25].

Метод простой итерации для преобразованного уравнения (см. п. 3 § 2) разработан в статье [74] И. П. Натансоном, рассматривавшим уравнения более широкого класса. Более общее преобразование уравнения дано в статье [4].

Подробное изложение метода Бубнова—Галёркии см. в главе III настоящего справочника, а также в [63].

О решении сингулярных интегральных уравнений с одной независимой переменной см. [8], [71], [72].



БИБЛИОГРАФИЯ

1. Бахвалов И. С., К оценке ошибок при численном интегрировании дифференциальных уравнений экстраполяционным методом Адамса, ДАН 104, № 5 (1955).
2. Березин И. С. и Жидков Н. П., Методы вычислений, т. II, М., Физматгиз, 1960.
3. Бирман М. Ш., Вариационные методы решения краевых задач, аналогичные методу Трэфтца, Вестн. ЛГУ, № 13, сер. матем., мех. и астр., вып. 3 (1956).
4. Бирман М. Ш., Об одном варианте метода последовательных приближений, Вестн. ЛГУ, № 9 (1952), 69—76.
5. Будак Б. М. и Горбунов А. Д., О разностном методе решения задачи Коши для уравнения $y'' = f(x, y)$ и для системы уравнений $x_i' = X_i(t, x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, \dots, n$) с разрывными правыми частями, Вестн. МГУ, сер. матем., № 5 (1958), 7—11.
6. Бут Э. Д., Численные методы, М., Физматгиз, 1959.
7. Вайнберг М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., Гостехиздат, 1956.
8. Векуа Н. П., Системы сингулярных интегральных уравнений, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
9. Волков Е. А., К вопросу о решении методом сеток внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа, Вычислит. матем., сб. 1 (1957).
10. Волков Е. А., О методе сеток для краевой задачи с кривой и нормальной производной, Журн. выч. матем. и матем. физ. 1, № 4 (1961), 607—621.
11. Воробьев Ю. В., Метод моментов в прикладной математике, М., Физматгиз, 1958.
12. Ворovich И. И., О существовании решений в нелинейной теории оболочек, Изв. АН, сер. матем., 19 (1955), 173—186.
13. Вулих Б. З., Введение в функциональный анализ, М., Физматгиз, 1958.
14. Гаген-Торн Л. Н., О разрешимости систем Ритца для функционалов теории пластичности, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова 66 (1962), 190—195.
15. Гаген-Торн Л. Н. и Михлин С. Г., О разрешимости нелинейных систем Ритца, ДАН 138, № 2 (1961).
16. Гельфанд А. В., Приближенное интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, Изв. АН, сер. матем. (1938), 583—594.

17. Годунов С. К., Рябенский В. С., Введение в теорию разностных схем, М., Физматгиз, 1962.
18. Гурса Э., Курс математического анализа, т. II, М. — Л., ОНТИ, 1936.
19. Давиденко Д. Ф., Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений, ДАН 88, № 4 (1953).
20. Калугина Е. П., Класс L_{Φ} как выпуклое многообразие, ДАН 98 (1954), 13—16.
21. Калугина Е. П., О классах $H_{\Phi}(r_1, r_2, \dots, r_n)$, ДАН 96 (1954), 13—15.
22. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., ИЛ, 1950.
23. Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, УМН 3, вып. 6 (28) (1948).
24. Канторович Л. В. и Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., Физматгиз, 1959.
25. Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, М. — Л., Гостехиздат, 1949.
26. Канторович Л. В. и Крылов В. И., Численные методы, в сб. «Математика в СССР за 30 лет», М. — Л., 1948.
27. Качанов Л. М., О вариационных методах решения задач теории пластичности, Прикл. матем. и мех. 23, вып. 3 (1959).
28. Качанов Л. М., Основы теории пластичности, М., Гостехиздат, 1956.
29. Качанов Л. М., Пример решения вариационным методом задачи упруго-пластического кручения, Исслед. по упруг. и пластичн., сб. 1, Изд. ЛГУ (1961), 157—161.
30. Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1953.
31. Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, М., Изд. АН СССР, 1949.
32. Крылов В. И., Сходимость и устойчивость численного решения дифференциального уравнения второго порядка, ДАН БССР 4, № 5 (1960), 187—189.
33. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, М. — Л., ГТТИ, 1933.
34. Курант Р., Фридрихс К., Леви Г., О разностных уравнениях математической физики, УМН, вып. VIII (1941).
35. Ладыженская О. А., Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными, УМН 12, вып. 5 (77) (1957), 123—148.
36. Ладыженская О. А., О нестационарных однородных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики, Матем. сб. 45 (87): 2 (1958), 123—158.
37. Ладыженская О. А., О решении нестационарных операторных уравнений, Матем. сб. 39 (81): 4 (1956), 491—524.
38. Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., Гостехиздат, 1953.
39. Лангенбах А., О некоторых нелинейных операторах теории упругости в гильбертовом пространстве, Вестн. ЛГУ, № 1, сер. матем., мех. и астр., вып. I (1961).

40. Лангенбах А., О применении вариационного метода к некоторым нелинейным дифференциальным уравнениям, ДАН 121, № 2 (1958).
41. Ланс Дж. Н., Численные методы для быстродействующих вычислительных машин, М., ИЛ, 1962.
42. Лебедев В. И., Метод сеток при второй краевой задаче для уравнения Пуассона, ДАН 127, № 4 (1959).
43. Лебедев В. И., О конечно-разностном аналоге задачи Неймана, ДАН 126, № 3 (1959), 494—497.
44. Лебедев В. И., Об оценке погрешности метода сеток для задач Дирихле и Неймана, ДАН 128, № 4 (1959).
45. Лебедев В. И., Оценка погрешности метода сеток для двумерной задачи Неймана, ДАН 132, № 5 (1960).
46. Лейбензон Л. С., Вариационные методы в теории упругости, М. — Л., Гостехиздат, 1943 (см. также: Собрание трудов акад. Л. С. Лейбензона, т. 1, Изд. АН СССР, 1951).
47. Лозинский С. М., О приближенном решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений, ДАН 97, № 1 (1954), 29—32.
48. Лозинский С. М., Об интервале существования решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, ДАН 94, № 1 (1954), 17—19.
49. Лозинский С. М., Об уравнениях в вариациях, ДАН 93, № 4 (1953).
50. Лозинский С. М., Оценка погрешности приближенного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, ДАН 92, № 2 (1953), 225—228.
51. Лозинский С. М., Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, Изв. вузов, Математика, 5 (1958).
52. Лузин Н. Н., О методе приближенного интегрирования акад. С. А. Чаплыгина, УМН 6, вып. 6 (46) (1951), 3—27.
53. Люстерник Л. А., Замечания к численному решению краевых задач уравнения Лапласа и вычислению собственных значений методом сеток, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова 20 (1947), 49—64.
54. Люстерник Л. А., О разностных аппроксимациях оператора Лапласа, УМН 9, вып. 2 (60) (1954).
55. Маховер Е. В., Изгиб пластинки переменной толщины с острым краем, Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, физ.-матем. ф-т, 17, № 2 (1957), 28—39.
56. Маховер Е. В., О спектре собственных частот пластинки с острым краем, Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та 197 (1958), 113—118.
57. Микеладзе Ш. Е., Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений, М. — Л., Гостехиздат, 1951.
58. Микеладзе Ш. Е., О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типа, Изв. АН, сер. матем., 5, № 1 (1941), 57—73.
59. Милн В. Э., Численный анализ, М., ИЛ, 1951.
60. Милн В. Э., Численное решение дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1955.

61. Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, М., ИЛ, 1957.
62. Миткевич В. М., Применение метода Ритца к задаче об изгибе консольной плиты, Сб. тр. Лаб. гидравл. машин АН УССР, вып. 9 (1961), 48—57.
63. Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, М., Гостехиздат, 1957.
64. Михлин С. Г., Интегральные уравнения и их приложения, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
65. Михлин С. Г., Некоторые условия устойчивости метода Ритца, Вестн. ЛГУ, № 13, сер. матем., мех. и астр., вып. 3 (1961).
66. Михлин С. Г., О методе Ритца в нелинейных задачах, ДАН 142, № 4 (1962).
67. Михлин С. Г., О рациональном выборе координатных функций в методе Ритца, Журн. выч. матем. и матем. физ. 2, № 3 (1962).
68. Михлин С. Г., Об устойчивости метода Ритца, ДАН 135, № 1 (1961).
69. Михлин С. Г., По поводу метода Ритца, ДАН 106, № 3 (1956).
70. Михлин С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала, М.—Л., Гостехиздат, 1952.
71. Михлин С. Г., Сингулярные интегральные уравнения, УМН 3, вып. 3 (25) (1948).
72. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М., Физматгиз, 1962.
73. Мысовских И. П., Лекции по методам вычислений, М., Физматгиз, 1962.
74. Натансон И. П., К теории приближенного решения уравнений, Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та 64 (1948), 3—8.
75. Панов Д. Ю., Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных, М.—Л., Гостехиздат, 1951.
76. Панов Д. Ю., Численное решение квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных, М., Гостехиздат, 1957.
77. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, М., Гостехиздат, 1953.
78. Польский Н. И., Некоторые обобщения метода Галёркина, ДАН 86, № 3 (1952).
79. Польский Н. И., Про збіжність методу Б. Г. Гальоркіна, ДАН УРСР, Від. фіз.-матем. та хім наук, № 6 (1949), 7—12.
80. Польский Н. И., Об одной общей схеме применения приближенных методов, ДАН 111, № 6 (1956).
81. Рихтмайер Р. Д., Разностные методы решения краевых задач, М., ИЛ, 1956.
82. Розе С. Н., О сходимости метода Л. М. Качанова, Вестн. ЛГУ, № 19 (1961).
83. Рябенкий В. С., Филиппов А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, М., Гостехиздат, 1956.
84. Сальвадори М. Дж., Численные методы в технике, М., ИЛ, 1955.

85. Самарский А. А., Априорные оценки для разностных уравнений, Журн. выч. матем. и матем. физ. 1, № 6 (1961).
86. Самарский А. А., Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа, Журн. выч. матем. и матем. физ. 1, № 3 (1961).
87. Самарский А. А., Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа, Журн. выч. матем. и матем. физ. 2, № 1 (1962).
88. Самарский А. А., Фрязинов И. В., О сходимости однородных разностных схем для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами, Журн. выч. матем. и матем. физ. 1, № 5 (1961).
89. Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. II, М., ИЛ, 1954.
90. Саульев В. К., Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, М., Гостехиздат, 1960.
91. Саульев В. К., К вопросу решения задачи о собственных значениях методом конечных разностей, Выч. матем. и выч. техн., сб. II, 1955.
92. Слободянский М. Г., Оценки погрешности приближенных решений линейных задач, Прикл. матем. и мех. 17, вып. 2 (1953).
93. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, М., Физматгиз, 1958.
94. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, М., Физматгиз, 1958.
95. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. V, М., Физматгиз, 1959.
96. Смирнова Т. Н., Полиномиальный прораб и проведение аналитических выкладок на ЭВМ, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова 66 (1962), 77—112.
97. Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.
98. Соболев С. Л., Уравнения математической физики, М., Гостехиздат, 1954.
- 98а. Соболевский П. Е., Об уравнениях с операторами, образующими острый угол, ДАН 116, № 5, 1957.
99. Степанов В. В., Курс обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Гостехиздат, 1953.
100. Талдыкин А. Т., Системы элементов гильбертова пространства и ряды по ним, Матем. сб. 29 (71):1 (1951).
101. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Об однородных разностных схемах, Журн. выч. матем. и матем. физ. 1, № 1 (1961).
102. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках, Журн. выч. матем. и матем. физ. 1, № 3 (1961).
103. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Разностная задача Штурма—Лиувилля, Журн. выч. матем. и матем. физ. 1, № 5 (1961).
104. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, М., Физматгиз, 1963.

105. Фридман В. М., Метод последовательных приближений для интегральных уравнений первого рода, УМН 11, вып. 1 (67), (1956).
106. Чаплыгин С. А., Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
107. Шур-Бура М. Р., Оценки ошибок численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, ПММ 16, вып. 5 (1952).
108. Эйбус Д. М., О решении краевых задач методом конечных разностей, ДАН 83, № 2 (1952), 191—194.
109. Яскова Г. Н. и Яковлев М. Н., Некоторые условия устойчивости метода Петрова—Галёркина, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова 66 (1962), 182—189.
110. Batschelet E., Über die numerische Auflösung von Randwertproblemen bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen, Zeits. angew. Math. und Phys., Bd. III, № 3 (1952), 165—193.
111. Bers L., On mildly nonlinear partial difference equations of elliptic type, Journ. Res. Nat. Bur. Standards 51, № 5 (1953), 229—236.
112. Brien G. G., Human M. A., Kaplan S., A study of the numerical solution of partial differential equations, Journ. Math. and Phys. 29, № 4 (1951), 223—251.
113. Garr J. W., Error bounds for the Runge—Kutta single-step integration process, Journ. Assoc. Comput. Mach. 5, № 39 (1958).
114. Dahlquist G., Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations, Math. Scand. 4, № 1 (1956), 33—53.
115. Douglas Jim, Gallie T. M., On the numerical integration of a parabolic differential equation subject to a moving boundary condition, Duke Math. Journ. 22, № 4 (1955), 557—571.
116. Forsythe G. E., Wasow W. R., Finite-difference methods for partial differential equations, New York—London, 1960. (Имеется русский перевод: В. Вазов, Дж. Форсайт, Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, М., ИЛ, 1963.)
117. Gerschgorin S., Fehlerabschätzungen für Differenzenverfahren bei Lösung partiellen Differentialgleichungen, Zeits. angew. Math. und Mech. 10 (1930), 373—382.
118. Giese J. H., On the truncation error in a numerical solution of the Neumann problem for a rectangle, Journ. Math. and Phys. 37, № 2 (1958), 169—177.
119. Gould S. H., Variational methods for eigenvalue problems, University of Toronto Press, 1957.
120. Horn J., Gewöhnliche Differentialgleichungen, Berlin und Leipzig, 1937.
121. Kato T., On the upper and lower bounds of eigenvalues, Journ. Phys. Soc. Japan 4, № 1 (1949), 334—339.
122. Kryloff N., Les méthodes de solution approchée des problèmes de la physique mathématique, Mémor. Sci. Math. 49 (1931).

123. Langenbach A., Variationsmethoden in der nichtlinearen Elastizität- und Plastizitätstheorie, *Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, Math-Nath. R.*, IX, 1959/60, 145—164.
 124. Mises R., v., Zur numerischen Integration von Differentialgleichungen, *Zeits. angew. Math. und Mech.* **10** (1930), 81—92.
 125. Motzkin T. S., Wasow W., On the approximation of linear elliptic differential equations by difference equations with positive coefficients, *Journ. of Math. and Phys.* **31**, № 4 (1953), 253—259.
 126. Synge L. E., The method of the hypercircle in functionspace for boundary value problems, *Proc. Royal Soc., ser. A*, № 1027, **191** (1947), 447—466.
 127. Temple G., The computation of characteristic numbers and characteristic functions, *Proc. London Math. Soc.* **29** (1928).
 128. Temple G., The theory of Rayleigh's principle as applied to continuous systems, *Proc. Royal Soc.* **119** (1928).
 129. Weinberger H. F., Upper and lower bounds for eigenvalues by finite difference methods, *Comm. Pure and Appl. Math.* **9** (1956).
 130. Weinberger H. F., Lower bounds for higher eigenvalues by finite difference methods, *Pacific. Journ. Math.* **8**, 339—368.
 131. Weinstein A., Étude des spectres des équations aux dérivées partielles de la théorie des plaques élastiques, *Mémor. Sci. Math.* **88** (1937).
 132. Weinstein D. H., Modified Ritz method, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **20** (1934), 529—532.
-

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аппроксимация точной задачи сеточной 79
Ароншайн Н. 281
- Бигармоническое уравнение Пуассона 91
- Вайнштейн А.* 281
Выбор координатной системы рациональный 302
— решетки и сходимость сеточных решений 143
— сеточного уравнения, аппроксимирующего линейное дифференциальное уравнение 84
- Дальквист Г.* 69
Дифференциальные уравнения второго порядка обыкновенные 211
— — — высших порядков обыкновенные 215
Достаточный признак сходимости метода Бубнова—Галёркина 315
Дюфорт 168
- Задача Гурса для квазилинейной гиперболической системы дифференциальных уравнений 180
— Дирихле для невырождающихся эллиптических уравнений 222
— — — слабо нелинейного эллиптического уравнения 183
— Коши для дифференциального уравнения первого порядка 13
— — — квазилинейной гиперболической системы дифференциальных уравнений 179
— краевая вторая 222
— — — двумерная 307
— — — для бесконечных областей 241
— — — одномерная 303
— — — первая 222
— — — третья 222
— Неймана для невырождающихся эллиптических уравнений 222
— — — сеточная 126
— о жестком контакте 236
— — — собственных значениях эллиптического оператора 136
— с заданными напряжениями 236
— — — смещениями 235
- Задача с подвижной границей для параболического уравнения 181
— смешанная 150, 236
— Стефана модифицированная однослойная для параболического уравнения 181
Замена конечно-разностная 137
— производных конечно-разностными отношениями 128
— ядра вырожденным 358
Запись уравнения в граничном узле 76
Звезда 84
— девятиточечная 79
— пятиточечная 74
Значения сеточной функции в узлах 72
— собственные самосопряженного эллиптического оператора 136, 140
- Изгиб пластин 230
— сжатой пластины 233
Индекс оператора 368
— разностной схемы 164
Интегральное уравнение первого рода с симметричным ядром 354
Интерполяционная формула Штёрмера 57
Интерполяция полилинейная 139
Итерационные способы решения сеточной задачи Дирихле 113
Итерация сеточных систем, удовлетворяющих принципу максимума 114
- Калугина Е. П.* 335
Канторович Л. В. 352
Качанов Л. М. 324
Квазилинейные гиперболические системы дифференциальных уравнений 175
Колебания упругих тел собственные 259
Коллатц Г. 75
Корректность сеточных уравнений 104
— — —, близких к самосопряженным 107
— — —, удовлетворяющих принципу максимума 105
Коэффициент роста 165

- Краевая задача вторая 222
 — — двумерная 307
 — — для бесконечных областей 241
 — — одномерная 303
 — — первая 222
 — — третья 222
 Кратность собственного числа 244
 — характеристического числа 338
Крылов А. Н. 61, 63
Крылов В. И. 69, 352
- Лозинский С. М.* 69
Люстерник Л. А. 116
- Метод Бубнова — Галёркина 314
 — — решения интегрального уравнения 364
 — итераций 349—354
 — Качанова 324
 — Либмана 116
 — малого параметра 31
 — наименьших квадратов 283
 — — в применении к интегральному уравнению 365
 — наискорейшего спуска 352
 — Ньютона — Канторовича для дифференциального уравнения первого порядка 27
 — — — системы дифференциальных уравнений 30
 — ортогональных проекций 266
 — последовательных приближений для дифференциального уравнения первого порядка 19
 — — — — — порядка выше первого 21
 — — — — — системы дифференциальных уравнений 22
 — прогонки 155
 — проекционный 317
 — простой итерации 349
 — прямых 329
 — — для бигармонического уравнения 333
 — — — параболического уравнения 334
 — — — уравнения Лапласа 331
 — — — Пуассона 331
 — Релея — Ритца 246
 — Ритца 202, 320
 — Рунге — Кутта 36
 — сеточный 70
 — средних арифметических 116
 — трапеций 35
 — Трефца 271
 — Чаплыгина 22
 — Эйлера интегрирования дифференциальных уравнений 35
 — энергетический 199
 — — в случае положительного оператора 210
- Методы решения системы Ритца 203
Микеладзе Ш. Е. 76
- Направление характеристическое 176
Натансон И. П. 372
 Невязка приближенного решения 34
- Неравенство Пуанкаре 198
 — Фридрихса 198
 Норма 105
 — энергетическая 192
- Область звездная 196
 Обобщенные производные 193, 196
 Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка 211
 — — — высших порядков 215
 Оператор краевой задачи 188
 — положительный 189
 — положительно определенный 190
 Определитель Фредгольма 349
 Основной прием Рунге — Кутта 38
 Оценка Гершгорина 110
 — Коллатца 110
 — погрешности 73
 — — для задачи Дирихле 109
 — — — Неймана 135
 — — — смещенной задачи 154
 — — — приближенного решения 264
 — — —, полученного методом Ньютона — Канторовича 28
 — — — через данные задачи 112
 — — — невязку 34
 — собственных чисел двусторонняя 279
 — функционала двусторонняя 278
- Пограничная полоса области 193
 Погрешность вариационного метода 264, 265
 — метода Рунге — Кутта 40
 — — Эйлера 40
 — приближенного решения 34, 73
 — формул Адамса 66
 Подобласть 193
 — внутренняя 193
 Подпространство собственное 244
 Полилинейная интерполяция 139
 Полоса пограничная 193
 Постоянная Липшица 21
 Построение начала таблицы при различных методах 57—64
 — полной координатной системы 300
 — решения вариационной задачи 200
- Приближенное вычисление собственных функций методом Келлога 344
 — — — — — моментов 343
 — — — — — Ритца 341
 — — — — — следов 346
 — — — чисел методом Келлога 344
 — — — — — моментов 343
 — — — — — Ритца 340
 — — — — — следов 346
 — — — характеристических чисел с помощью определителя Фредгольма 349
 — — решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка 15
 — — — — — n -го порядка 17
 — — — — — системы дифференциальных уравнений 18

- Признак устойчивости для уравнений с постоянными коэффициентами 169
- Признаки устойчивости 156
— сеточной задачи 164
- Применение квадратурных формул 354—358
- метода Бубнова — Галёркина к задачам математической физики 315
- — — — — упругости 289
- Принцип максимума 92
—, сеточный аналог 92
— минимаксимальный 263
— минимума потенциальной энергии в статической теории упругости 234
- Произведение энергетическое 192
- Производные обобщенные 193, 196
- Простая итерация сеточных систем, удовлетворяющих принципу максимума 114
- Пространства С. Л. Соболева 196
- Пространство энергетическое 192
- Разложение решения дифференциального уравнения в ряд Тейлора 14—19
- Разностные методы для систем дифференциальных уравнений 54
— схемы устойчивости 173
- Разрешимость сеточных уравнений 92
- Рациональный выбор координатной системы 302
- Решение Даламбера 143
— нелинейной системы Ритца 324
— — — сведением к задаче Коши 326
— обобщенное 320
— с конечной энергией 210
— сингулярных уравнений с вырожденным ядром 368
— тривиальное 243
- Ричардсон* 156
- Розе С. Н.* 324
- Ряд сетки 144
- Самосопряженное эллиптическое дифференциальное уравнение 99
- Свирский И. В.* 281
- Свойства предельные коэффициентов Ритца 293
— собственных чисел 244—245, 339, 340
- Сетка 70
— правильная треугольная 86
— прямоугольная 71
— шестиугольная 86
- Сеточная задача Неймана 126
— (разностная) схема решения смешанной задачи для уравнений гиперболического и параболического типов 158
- Сеточные уравнения, близкие к самосопряженным 112
- Сеточные уравнения, удовлетворяющие принципу максимума 109
- Сеточный аналог вариационной задачи 132
— — принципа максимума 92
— — самосопряженного эллиптического дифференциального уравнения 99
- Сингулярное интегральное уравнение, приближенное решение 367
- Система минимальная 291
— Ритца 202
— сильно минимальная 292
— обыкновенных дифференциальных уравнений 218
- След ядра 346
- Слободянский М. Г.* 283
- Слой 158
- Смешанная задача 150, 236
- Снос простой 75
- Соболев С. Л.* 335
- Собственная функция 136
—, нормированная 136
- Собственное значение самосопряженного эллиптического оператора 136, 140
— число 243
- Собственные колебания упругих тел 259
— функции, приближенное вычисление методом Келлога 344
—, — — — моментов 343
—, —, — — Ритца 341
—, —, — — следов 346
— — ядра 338
— числа, приближенное вычисление методом Келлога 344
—, — — — моментов 343
—, —, — — Ритца 340
—, —, — — следов 346
— — ядра 338
- Собственный элемент 243
- Согласование норм 73
- Спектр вырождающегося эллиптического уравнения 258
— дискретный 245
— обыкновенного дифференциального оператора 250
— собственный 243
— эллиптического оператора 253
- Сравнение численных методов 18
- Схема неявная 151, 153
— перемежающаяся 172
— явная 151, 152
- Сходимость невязки к нулю 299
— по энергии 192
— приближенного решения для задачи Дирихле 109
— — — Неймана 135
— — — смешанной задачи 154
— сеточных решений 143
- Теорема о сходимости и оценка погрешности 108
— Чаплыгина 23
- Теоремы вложения 196
- Теория пологих оболочек нелинейная 322

- Узел внутренний 74
 — второго рода 93
 — граничный 75
 — первого рода 93
 Узлы сетки 70
 — — основные 71
 Улучшение аппроксимации за счет
 выбора оператора 87, 90
 — — — расширения звезды 87
 Уравнение, близкое к самосопряжен-
 ному 101
 — волновое одномерное 143
 — Вольтерра второго рода 354
 — — первого рода 355
 — гиперболическое 143
 — параболическое 145
 — Пуассона бигармоническое 91
 — Фредгольма 356
 — Фурье 145
 — эллиптическое 101
 — — вырождающееся 222, 227
 — — высшего порядка 228
 — — невырождающееся 221
 Уравнения сеточные 71, 72
 — — многоточечные 89
 — эллиптического типа 221
 Условия геометрические 206
 — динамические 206
 — кинематические 206
 — краевые главные 206
 — — естественные 206
 — — неоднородные 208
 — положительной определенности
 дифференциальных операторов 262
 — согласования данных смешанной
 задачи 150
 — сходимости метода Ньютона —
 Канторовича 28
 — — — простой итерации 350
 Усовершенствованный метод Эйлера
 38
 Устойчивость метода Рунге 290, 294
 — равномерная 161
 — разностной схемы 156, 162
 — разностных методов 64
 — сеточной задачи по граничным
 условиям 161
 — — — — начальным условиям 160
 — — — — правой части 161
 — сжатой пластины 258
 Учет граничного условия линейной
 интерполяцией 75
 Формула Адамса интерполяционная
 47
 — — экстраполяционная 42
 — Нистрема экстраполяционная 51
 — Синджа 267
 — типа Коуэлла 51
 — Штёрмера интерполяционная 57
 — — экстраполяционная 55
 Франкел 168
 Функционал возрастающий 321
 — полунепрерывный сверху 321
 — теории пластичности 323
 — энергетического метода 199
 Функция сеточная 72
 — собственная 136, 243
 — — нормированная 136
 Характеристическое направление 176
 — — число кратное 338
 — — простое 338
 — — ядра 338
 Характеристические числа, прибли-
 женное вычисление с помощью
 определителя Фредгольма 349
 Ход прогонки обратный 155
 — — прямой 155
 Число собственное 243
 — — характеристическое кратное 338
 — — простое 338
 — — ядра 338
 Шаг интегрирования 35
 Ширина пограничной полосы 193
 Экстраполяционная формула Адамса
 42
 — — Нистрема 51
 — — Штёрмера 55
 Элемент собственный 243
 Элементы координатные 202
 Эллиптическое уравнение 101
 Энергетическое произведение 192
 — пространство 192
 Энергия элемента 190
 Ядро симметричное 337
 — — положительно определенное
 339
 — со слабой особенностью 337
 — — — полярностью 337

Справочная математическая библиотека

Приближенные методы решения
дифференциальных и интегральных уравнений

М., 1965 г., 384 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко.*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно.*

Корректор *Т. С. Плетнева.*

Сдано в набор 4/VI 1964 г. Подписано к печати 26/IX 1964 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 12. Условн. печ. л. 19,68. Уч.-изд. л. 18,07. Тираж 20750 экз. Т-14811. Цена книги 1 р. 05 к. Заказ 1633.

Издательство «Наука».

Главная редакция
физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома
Государственного комитета
Совета Министров СССР по печати.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

СПРАВОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ

1. В. Л. ДАНИЛОВ, А. Н. ИВАНОВА и др., Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби).

2. И. Г. АРАМАНОВИЧ, Р. С. ГУТЕР и др., Математический анализ (дифференцирование и интегрирование).

3. Л. А. ЛЮСТЕРНИК и др., Математический анализ (вычисление элементарных функций).

4. А. П. МИШИНА и И. В. ПРОСКУРЯКОВ, Высшая алгебра (линейная алгебра, многочлены, общая алгебра).

5. В. А. ДИТКИН и А. П. ПРУДНИКОВ, Интегральные преобразования и операционное исчисление.

6. Н. П. БУСЛЕНКО, Д. И. ГОЛЕНКО и др., Метод статистических испытаний (Монте-Карло).

7. Н. А. КРИНИЦКИЙ и др., Программирование.

8. Р. С. ГУТЕР и др., Элементы теории функций (функции действительного переменного, приближение функций, почти-периодические функции).

9. Н. Я. ВИЛЕНКИН и др. Функциональный анализ.

10. В. М. БАБИЧ и др., Линейные уравнения математической физики.